ANAIS DE FILOSOFIA CLÁSSICA

PARMÊNIDES E A MATEMÁTICA

Gérard Émile Grimberg
Instituto de Matemática /Universidade Federal do Rio de Janeiro

O poema de Parmênides é o primeiro texto a refletir sobre o discurso da verdade e como tal um discurso atento à lógica. Durante a Antiguidade grega, a matemática vai se tornar o modelo de discurso da verdade. É portanto legitima a tentiva de avaliar e delimitar alguns aspectos da influência que teve o pensamento de Parmênides sobre o desenvolvimento da matemática grega.

Com efeito, quando o texto de Parmênides foi escrito, a matemática grega não estava ainda a caminho deste discurso sintético-dedutivo que podemos admirar nas obras de Euclides, de Apolônio ou de Arquimedes. Os fragmentos da matemática grega que restam desta época ou também os comentários de Proclo e Pappus que dão algumas idéias da matemática antes do poema de Parmênides, assim como os estudos modernos (por exemplo os estudos de A. Szabó) dão uma idéia de pesquisas matemáticas empíricas orientadas pelos problemas de construção ou de algumas propriedades elementares dos números visualizados através de figuras.

A necessidade de demonstração e de uma exposição através de definições, postulados, axiomas, vêm depois: a primeira redação de *Elementos*, segundo Proclo, data de Hipócrates de Quios que segue Parmênides. Houve também dois outros autores de *Elementos* segundo a mesma fonte citada por Szabó, Léon e Teudio de Magnésia, que parecem ter vivido um pouco antes de Platão.

Segundo Proclo, "Léon teria escrito *Elementos* tão elaborados tanto pelo número quanto pela utilidade das demonstrações" [1]. Para se ter a preocupação de *demonstrar* e não *mostrar* por figuras, construir, aliás dois sentidos que contém o verbo *deiknumi*, é preciso ter consciência de que a matemática deve ser construída a partir de princípios. Parece que esta transformação da matemática se deu um pouco antes de Platão, pois na *República* ele escreve que os que tratam de geometria e de aritmética, "supõem o par e ímpar, as figuras, três espécies de ângulos e outras coisas semelhantes conforme a sua pesquisa, que as tratam enquanto coisas conhecidas, enquanto hipóteses, estimando que eles não tem mais que justificar nem para si nem para os outros, visto que são evidentes para todos, e partindo destas, percorrendo o resto, eles chegam por via de conseqüência até a demonstração que eles tencionavam encontrar"[2].

Na época de Platão os irracionais são já bem conhecidos sob uma certa forma mas a alusão à demonstração da irracionalidade de 2, a primeira *reductio ad absurdum* na matemática, se encontra só em algumas obras de Aristóteles como, por exemplo, os *Primeiros analíticos,* I. 23[3].

Antes da análise do poema de Parmênides, é preciso evocar a ruptura que representa esta obra. O pensamento de Parmênides vem depois da trilogia dos pensadores de Mileto: Tales, Anaximandro, Anaxímenes. As teorias desses pensadores têm três aspectos segundo Vernant[4]: ruptura com os mitos da criação (Hesíodo); investigação dos fenômenos naturais onde se destacam elementos da natureza, o que confere à explicação um caráter positivo e abstrato, uma ordem baseada sobre leis naturais e não sobre deus; uma orientação geométrica da explicação: trata-se de dar uma imagem do mundo, do cosmos. Assim a Terra está no centro do mundo: Anaximandro dizia que "a terra é suspensa, não submetida a constrangimento algum, mas imóvel devido a seu igual afastamento de todas as coisas" (Hipólito, *Ref.* I,6,3.).

---

[1] Citado por Szabó [1993] , *Entfaltung der grieshischen Mathematik*, "L´aurore des mathématiques grecques", Vrin, Paris, 2000, p. 240.
[2] Platon, *Republica,* 510 b.
[3] O trecho do Teeteto tratando dos irracionais (147 e-148 a) mostra que o conceito de grandeza irracional está ainda ligado à noção de média geométrica, dos números retangulares e quadrado, e parece seguir o padrão da mostração de Sócrates no *Mênon*, e não utilizar o raciocínio por absurdo indicado por Aristóteles.
[4] Vernant, Jean-Pierre [1975], T. 1 p. 203 e sqq.

Na Magna Grécia, Pitágoras precede Parmênides. Mas parece que até Filolau, segundo Iâmblico (*Vie pythagorique*, 199), não foi publicado nada da seita pitagórica, e, desde a Antiguidade, pensa-se que Pitágoras não escreveu tratado algum. Diógenes Laércio faz do jovem Parmênides um amigo do pitagórico Amínias; isso significaria que o pensamento de Parmênides se elaborou sem dúvida em relação às teorias de Pitágoras, já que o pensamento e a ideologia pitagórica parecem ter sido dominantes nesta época. No entanto, o escrito de Parmênides é datado bem antes do primeiro tratado publicado dos pitagóricos, o tratado de Filolau.

O poema de Parmênides tem o mesmo título do tratado de Anaxímenes, *Sobre a Natureza* e, segundo a fala da Deusa, tem por objetivo primeiro instruir do "coração da verdade", e se fosse um discurso sobre a natureza seria, portanto, pelo menos, até o final do Fragmento 8, um discurso sobre a natureza da verdade ou do discurso verdadeiro. Com efeito, no poema aparecem expressões como "É o caminho de persuasão — pois Verdade o segue — "(Fr.2-verso 4) ; "Precisa que o dizer o pensar e o que é seja"(Fr.6, verso 1) ; "Não permitirei que tu digas nem penses (Fr.8, versos 7-8)...e "Aqui cesso para ti um discurso fiável e um pensamento acerca da Verdade" (Fr.8, versos 50-51). Deste ponto de vista, há já uma ruptura em relação aos pensadores de Mileto. A Deusa que acolhe Parmênides marca a chegada da trilha. Entrando pelas portas, Parmênides chegou ao destino da sua viagem. Agora vai ouvir "a palavra acerca das únicas vias do questionamento que são a pensar" (Fr.2 verso 1-2).

O caminho do pensar toma assim o lugar do "caminho apartado dos homens". Se corresponder à realidade o que conta Diógenes Laércio, seja que Parmênides deu leis a sua cidade Eléia, o seu poema invocando Témis e Díke entregaria as leis do caminho do pensar, que devem seguir os iluminados. Em vez de pensar a Natureza, Parmênides escreve sobre a natureza do pensar e do dizer verdadeiro. Mas como se trata de seguir um caminho, vamos seguindo as etapas do dizer e do pensar.

A primeira reflexão de Parmênides no Fragmento 2 visa precisamente "as únicas vias de questionamento que são a pensar: "uma para o que é e como tal, não é para não ser". A proposição aqui é mínima, reduzida à forma verbal ἔστιν. Esta enunciação não comporta nem sujeito nem objeto. Do ponto de visto lógico, Parmênides ressalta aqui, dentro do discurso, a importância do que passará a ser chamado de συμπλοκή, de cópula. Pensamos que a proposição ἔστιν " marca a identidade, e o que segue no verso, τε καὶ ὀυκ ὡς ἔστι μὴ εἶναι "e, como tal, não é para não ser", confirma esta avaliação pois o verso inteiro enuncia o que chamamos o princípio da dupla negação que hoje podemos exprimir da forma seguinte : $A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$. Assim, Parmênides insistia sobre a estrutura lógica do discurso. Segue a outra via possível :

"outra, para o que não é e, como tal, é preciso não ser,
esta via, afirmo-te que é uma trilha inteiramente insondável;
pois nem ao menos reconhecer-se-ia o não ente, pois não é realizável".

As palavras "ὁδοὶ μοῦναι" (únicas vias), o balanceamento dos versos "ἠ μὲν... ἠ δ'..." assim como o fato da segunda via ser a negação literal da primeira mostram que fora desta alternativa não há outro caminho, o que representa implicitamente o princípio do terceiro excluido escrito hoje da forma $A \vee (\neg A)$, como o ressalta de maneira tão clara Nestor Cordero no seu artigo. Alias, do ponto de vista da lógica, esta posição é coerente, visto que a proposição $\neg(\neg A) \Rightarrow A$ tem por conseqüência o princípio do terceiro excluído[5].

O princípio de identidade também aparece em vários fragmentos: fragmento 3, "o mesmo é a pensar e a ser"; fragmento 4, o ente de manter-se ente; fragmento 8, verso 49, "pois de todo lado igual a si, se estende nos limites por igual". O discurso a respeito do ente utiliza a via da identidade.

O princípio de não-contradição aparece como negação da segunda via no fragmento 6:

"eles são levados,
tão surdos como cegos estupefatos, hordas indecisas,
para os quais o existir e não ser valem o mesmo
e não o mesmo, de todos o caminho é de ida e volta".

Aqui a proposição é "existir e não ser", seja *p*. Que esta proposição vale e não vale pode ser formulado como $p \wedge (\neg p)$, o que, segundo Parmênides, não é uma via de investigação. Devemos portanto negar esta possibilidade e, então, aceitar, como princípio, o

[5] Yvon Gauthier [1991], p. 28, ressalta o fato que Brouwer [1975], p. 268, nega a implicação $\neg(\neg A) \Rightarrow A$ para os domínios infinitos, o que fundamenta a lógica intuicionista.

princípio de não contradição $\neg\,[p \wedge (\neg\, p)]$. Outro trecho tem o mesmo significado, como se pode notar no fragmento 7, v.1:

"Pois isto não, nunca hás de domar não entes a serem.
mas o que pensas, separa desta via de investigação".
Em uma investigação, não se pode coexistir não ente e ser.

Estas ferramentas do discurso verdadeiro permitem o raciocínio pelo absurdo, no fragmento 8, onde ele enumera τὰ σήματα, as marca do ente.

"ainda uma só palavra resta do caminho:
que é ; sobre este há bem muitos sinais :
que sendo ingênito também é imperecível".
O que segue é a demonstração da afirmação :
"...Pois que origem sua buscarias ?
Por onde, de onde se distenderia ? Não permitirei que tu
digas nem penses do não ente : pois não é dizível nem pensável
que seja enquanto não é".

A hipótese do ser engendrado pelo não ser leva à identidade: o não ente é. Isto é o primeiro raciocínio pelo absurdo escrito que chegou até nós. Parmênides soma a este raciocínio um outro argumento:

"E que necessidade o teria impelido,
depois ou antes, a desabrochar começando do nada?"

Este novo argumento equivale a dizer que não há razão que pudesse explicar o nascimento do ser a partir do não ser. Aqui vigora o princípio de razão suficiente que não é, aliás, um argumento de lógica formal, mas uma exigência do discurso racional.

A hipótese do ser gerado pelo ser leva também à contradição. Retoma também o modo do raciocínio por absurdo para demonstrar que o ser deve ser fora do tempo.

O discurso da primeira via inaugura um tipo de discurso novo: Nestor Cordero tem ressaltado a troca de τὰ ὄντα pelo τὸ ὄν. No discurso de Parmênides não há, como no discurso dos pensadores de Mileto, as coisas, os entes frente a nós que devemos explicar.

Tudo se junta ao pensar e às leis do pensamento. O singular τὸ ὄν é uma característica e a grande inovação parmenidiana. O objeto do discurso é o que constitui o pensar e o dizer enquanto discurso verdadeiro. Isto diz respeito a todo ente; logo, os entes se tornaram singular, pois o discurso verdadeiro é discurso universal. O discurso é portanto um discurso fechado sobre si, percorrendo o seus princípios e se desenvolve com suas próprias forças. Este fechamento lógico permite então o tipo de raciocínio novo, o raciocínio apagógico, a *reductio ad absurdum*.

Aliás, os termos que vão posteriormente em Aristóteles[6] ou nas obras matemáticas, por exemplo em Arquimedes, designar esta reflexão são μετ᾽ ὁδός, dentro do ou com o caminho, encaminhamento; ἐπ᾽ ὁδός, sobre o caminho, acima do caminho, caminho em direção de, são termos derivados da metáfora do caminho que atravessa o poema de Parmênides[7].

Este questionamento está na raiz do questionamento da matemática. Pelos princípios que enuncia, pelo rigor que transparece, pelo tipo de raciocínio novo que formula, Parmênides cria as bases, as condições de possibilidade do discurso dedutivo da matemática.

Para elaborar um discurso dedutivo, isto é, uma exposição da teoria semelhante àquela dos *Elementos* de Euclides, é necessária a ciência das regras lógicas do raciocínio, um domínio da utilização lógica da negação, dos princípios de não contradição e do terceiro excluído assim como é necessário o procedimento do raciocínio indireto (*reductio ad absurdum*). Ora, nos poucos fragmentos de matemáticas gregas que sobram do período de Parmênides até Euclides não consta raciocínio indireto algum. Esse tipo de raciocínio encontra-se unicamente nos relatos dos paradoxos de Zenão, nas obras de Platão e de Aristóteles, este último elaborando, nos *Analíticos*, a teoria do raciocínio indireto. Pelo que chegou até nós das obras dos gregos, matemáticas e filosóficas, poderíamos questionar a concepção de Platão que faz da matemática uma propedêutica. Nos textos do Parmênides[8] de

---

[7] Os dois termos encontram-se em Aristóteles, por exemplo, o primeiro na *Metafísica* A2-983 a 22, o segundo na *Ética a Eudemo*, 1230a35, e o segundo termo é o título da carta de Arquimedes a Eratóstenes, "ΠΡΟΣ ΕΡΑΤΟΣΘΗΝΗΝ ΕΦΟΔΟΣ".

[8] A construção da argumentação do Parmênides do Platão representa talvez o raciocínio lógico mais sutil e bem mais complexo do que qualquer demonstração que se encontra em Euclides.

Platão como em toda a sua obra, nos paradoxos de Zenão, parece que assistimos ao movimento inverso: o pensamento, a filosofia nascente, enuncia um tipo de discurso e logo um questionamento sobre o próprio caminho do pensamento. Sem os exercícios dialéticos de Zenão ou do Parmênides de Platão é difícil conceber o desenvolvimento da matemática grega partindo do estudo de construções geométricas, de mostração de propriedades a partir de figuras, da determinação empírica de algumas propriedades numéricas, até a construção euclidiana.

Pretendemos através de Euclides dar conta desta perspectiva, concebendo, portanto, as obras filosóficas como fonte de inspiração dos matemáticos.

Já escrevemos que a redação de vários *Elementos* de matemática citados por Proclo é posterior a Parmênides. Mas só chegou até nós os *Elementos* de Euclides. Desde a Antiguidade tentou-se determinar o que fazia parte do trabalho de elaboração de Euclides e o que era só uma restituição por parte de Euclides de trabalhos de matemáticos anteriores. Assim, se sabe que a maior parte do quinto livro é provavelmente a obra de Eudoxo[9], a Aritmética (Livros VII-VIII) viria dos pitagóricos. Não é fácil, no entanto, determinar exatamente na obra de Euclides o que faz parte já de uma tradição e o que é elaboração própria do alexandrino. Mas comecemos pela aritmética.

O livro VII de Euclides que trata da aritmética inicia-se pela definição da unidade "Μονάς ἐστιν, καθ᾽ ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται", a unidade é aquilo pelo que cada um dos entes é dito um". Esta definição não é pitagórica já que, segundo Pitágoras, as coisas (τὰ ὄντα) são números. Os pitagóricos não questionam o problema da unidade do τὸ ὄν. O discurso de Parmênides muda o questionamento : substitui τὰ ὄντα por τὸ ὄν. Na definição de Euclides, a unidade é o predicado de todas as coisas enquanto cada uma das coisas é. Esta definição da unidade segue a de Parmênides, pois a unidade é a marca (σήματα) do τὸ ὄν. É a razão pela qual Um não é um número[10].

[9] Jean Itard [1952], p. 93, no entanto, contesta esta avaliação.
[10] Cf. também a argumentação de Szabó [1993], pp. 274-275.

Ressaltamos também que o conceito euclidiano não é tampouco platônico. Platão tenta resolver a questão do Um e do múltiplo em uma coisa. Como pensar que uma coisa é uma, se esta possui várias determinações, e, logo, a ela pode ser atribuída uma pluralidade de predicados[11]? Este problema que norteia vários diálogos de Platão não é a preocupação dos matemáticos. O problema dos matemáticos é produzir definições não contraditórias e não questionar o ser das coisas[12].

Pensamos que a definição mesma do número é também inspirada pelo questionamento parmenidiano: "Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος", o número é uma pluralidade composta de unidades. A pluralidade que nega Parmênides é a pluralidade do ser. Dentro do ser não podem coexistir Um e vários. A definição euclidiana não contradiz esta concepção. O número é construído a partir da unidade. Com efeito, a primeira função desta definição é excluir frações do domínio da aritmética[13], a unidade é indivisível.

A teoria de Parmênides enquanto discurso do ὄν, e do ἐστιν, pode ser utilizada para elaborar qualquer teoria a partir de elementos do pensar. A aritmética é um discurso que tem a mesma estrutura lógica que o discurso de Parmênides.

A definição do ponto, com a definição da relação entre linha e ponto, parece responder às questões levantadas pelos exercícios dialéticos de Zenão: "Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν" o ponto é o que não tem partes. E a relação do ponto para com a linha: "Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα", as extremidades da linha são pontos. Estas definições evitam o problema colocado pelos paradoxos: a linha, em particular o segmento de linha reta, é divisível, e portanto uma parte de segmento é um segmento e não é o ponto, já que este é indivisível. Assim, por exemplo, se contorna a dificuldade apontada por Zenão do movimento da seta: visto que a seta percorre um ponto em um instante, a velocidade da seta neste instante

[11] Aubenque [1962], pp. 146-147.
[12] Gardies [1988], p. 16, dá um outro argumento em favor do fato de que esta definição não é nem pitagórica nem platônica, citando o comentário de Aristóteles na *Metafísica* B987 b 22-24 : "Que o Um seja a substância mesma e não o predicado de uma outra coisa da qual se diz uma, Platão concorda com os Pitagóricos". Szabó [1969], p. 287, relaciona a definição da unidade com os versos 22-24 do fragmento 8.
[13] Gardies [1988], p.16.

é nula, portanto a seta é imóvel[14]. Não é, então, por acaso que estas definições assemelham-se àquelas que Aristóteles enuncia no *Organon*[15]. A única diferença é que Aristóteles designa o ponto pelo termo feminino στιγμή, enquanto Euclides utiliza o termo neutro σημεῖόν. Segundo V. Vita e R. Netz, os dois verbetes parecem ter surgido ambos na primeira metade do século IV[16]. Mas o fato é que Euclides usa o termo σημεῖόν, e que este parece posterior a Aristóteles. Aliás, na terminologia aristotélica, σημεῖόν tem um significado lógico[17]. Isto leva a pensar que a redação de certas definições do livro I de Euclides data do período helenístico.

Assim, há uma certa oposição que caracteriza as definições da unidade e do ponto, do número e da reta, oposição que diferencia o discreto do contínuo, a aritmética da geometria. Mas assim como a definição do número é construída a partir da unidade, a continuidade da reta é realizada pela escolha de dois pontos indivisíveis, atributo que um ponto possui em comum com a unidade.

Estas definições tornam um discurso não contraditório em cada um dos dois domínios da matemática. Estes objetos (unidade, números, pontos, retas) são objetos de pensamento, do *noein*, só existem enquanto elementos de discurso, são da ordem da razão e, como tal, fazem parte da primeira parte do discurso de Parmênides, pois obedecem só às leis da lógica instituída por este discurso.

Outro aspecto importante e que é também a concepção Eleática: o tratamento do infinito. Não há dúvida de que os paradoxos de Zenão[18] deram início a uma reflexão sobre a possibilidade de pensar não o infinito em si, que tudo leva a crer com Parmênides que é impensável, mas a possibilidade de pensar uma série de operações infinitas.

---

[14] Cf. Aristóteles, *Física* VI 239 b 5-10 e 29-33.
[15] Aristóteles, *Organon*, Categorias, 5a, cf. também *Metafísica*, livro Γ , 1001 b e livro Μ 1077 a e 1085 b, onde se discute a relação entre ponto, linha reta e quantidade contínua.
[16] Vita [1982]. Cf. também Netz [2004] p. 263 e a nota 79.
27 70 a.
[17] Aristóteles, *Organon*, Primeiros analíticos , 5a
[18] Cf. as conclusões de Caveing [2002], p. 125-128.

Tomemos por primeiro exemplo a demonstração de Euclides da proposição IX 20 dos *Elementos*, que enuncia: "Ὁι πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν" (os números primos são em maior quantidade que toda quantidade proposta de números primos). É uma demonstração pelo absurdo. Euclides considera três números primos e mostra por absurdo que um quarto número, construído a partir destes, é também primo, e como este raciocínio pode ser repetido considerando, em vez de três números, qualquer número de números primos (o que é implícito na demonstração de Euclides), há uma infinidade de números primos.

Outro tipo de infinito aparece em Euclides na primeira proposição do livro X que caracteriza duas grandezas incomensuráveis: "Εὰν δύο μεγεθῶν [ἐκκειμένων] ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη."(Se, quando a menor de duas grandezas é continuamente subtraída da maior, o que resta nunca mede a precedente, as grandezas são incomensuráveis).

O algoritmo de Euclides aplicado a dois números se compõe de um número finito de etapas. Qualquer dupla de números tem uma medida comum. Para dar um exemplo deste algoritmo, vamos determinar o MDC dos números 30 e 42.

Procedemos à divisão de 42 por 30: resto 12. Prosseguindo, a divisão de 30 por 12: resto 6 e, enfim, a divisão 12 por 6: resto 0. O último resto não nulo, 6, é o MDC.

Quando as grandezas não são comensuráveis, a implementação deste algoritmo não se acaba, o resto diminuiu sem nunca se anular. A demonstração de Euclides é uma demonstração por absurdo, o que mostra a importância deste tipo de demonstração para conceber um raciocínio constituído de uma série infinita de etapas.

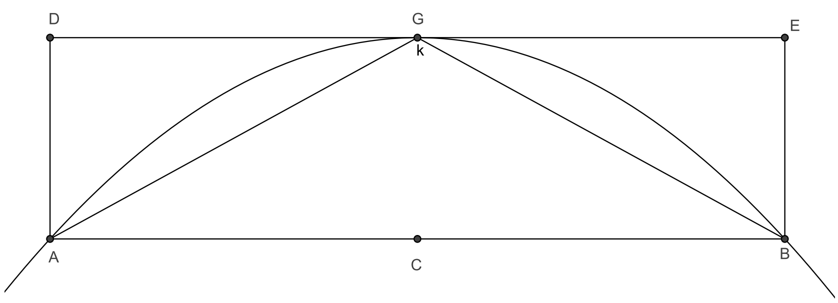
Ora, podemos constatar que o próprio Platão utiliza um raciocínio pelo absurdo, por exemplo no *Teeteto*[19]. Platão, que não perde a oportunidade de descrever o quanto o

[19] Platão, *Teeteto*, 162e, citado por Szabó [1969], p. 237 n.1. Mas Szabó vê nesta demonstração a prova que a demonstração por absurdo já era característica da demonstração matemática na época de Platão. Ele não dá, no

encaminhamento dos raciocínios presentes na matemática pode servir de modelo à reflexão filosófica, não parece ter notado a importância do raciocínio indireto na matemática. Este fato leva a pensar que este tipo de raciocínio é, na época de Platão, mais o modelo dos exercícios dialéticos e dos aforismos filosóficos do que da matemática.

Um último aspecto que queremos ressaltar é a importância do raciocínio indireto nos procedimentos infinitesimais. Tomemos um exemplo emblemático; um dos métodos de Arquimedes para determinar a quadratura da parábola.

Arquimedes inicia este método pela seguinte consideração: se considerarmos um triângulo AGB inscrito no arco da parábola, a área deste triângulo é maior do que a metade da área situada sob o arco da parábola, visto que a área do triângulo é metade do retângulo ABED.

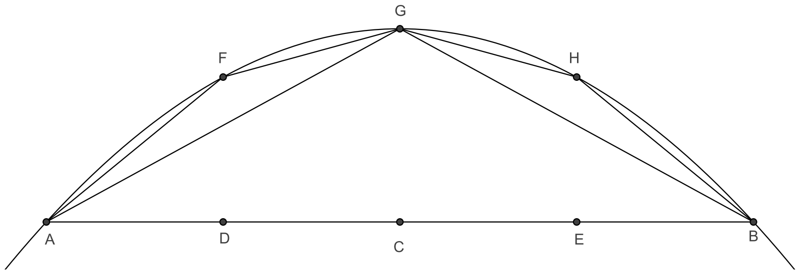


"isto demonstrado, é claro que é possível inscrever dentro deste segmento um polígono tal que [as áreas de] os segmentos restantes [da parábola] sejam inferiores à toda área dada ; pois, subtraindo sempre uma área que é maior do que a metade, é claro pela proposição acima que, continuando a diminuir os segmentos que ficam, nós os tornaremos inferiores a qualquer área dada"[20].

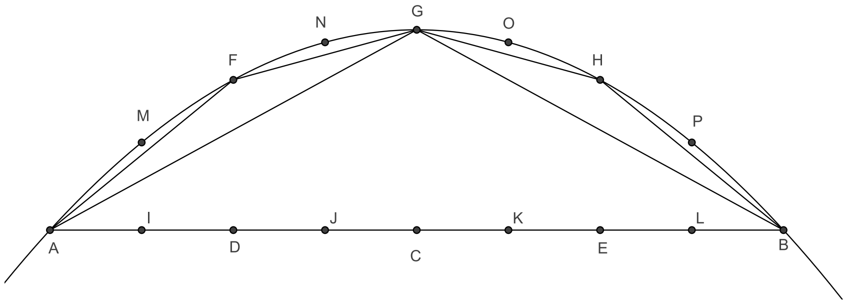
Isto é uma aplicação do lema de Arquimedes, enunciado que se encontra também em Euclides, X, prop. 1.

entanto, outro argumento.
[20] Arquimedes, Quadrature de la parabole, corol da prop. 20. (tradução nossa)

Ele vai implementar este procedimento, considerando a figura abaixo.



Mostra-se que os dois triângulos AFG e BHG tem uma área igual à $\frac{1}{8}$ da área T do triângulo AGB. Logo, a área do polígono AFGHB é igual à $T + \frac{1}{4}T$.



Reiterando o procedimento, isto é, tomando os pontos médios I, J, K, L de cada um dos segmentos [AD], [DC], [CE] e [EB], e traçando sobre a parábola os pontes correspondentes M, N, O, P, mostraria da mesma maneira que o polígono AMFNGOHPB tem uma área igual a $T + \frac{1}{4}T + \frac{1}{4^2}T$. Podemos, aliás, constatar sobre a figura acima que se desenharmos este polígono, sua área é já uma excelente aproximação da área da parábola.

Vê-se depois a identidade seguinte, para todo n (o texto considera a relação para n=5)

$$T + \frac{1}{4}T + \frac{1}{4^2}T + \frac{1}{4^3}T + ... + \frac{1}{4^n}T + \frac{1}{3 \times 4^n}T = \frac{4}{3}T.$$

Pela identidade acima podemos nos aproximar de $\frac{4}{3}T$ tanto quanto quisermos. Com efeito, depois de n etapas, estaremos a uma distância de $\frac{4}{3}T$ igual à $\frac{1}{3 \times 4^n}T$.

Arquimedes inicia o raciocínio indireto. Seja A a área da parábola.

Suponhamos $A < \frac{4}{3}T$; é fácil mostrar que a linha poligonal em baixo da área delimitará uma área que irá ultrapassar A, o que é impossível.

Suponhamos que $A > \frac{4}{3}T$; vemos que a área em baixo da linha poligonal não pode ultrapassar $\frac{4}{3}T$, e, portanto, não poderia continuar se aproximando ao longo das etapas da área da parábola.

Logo $A = \frac{4}{3}T$!

O raciocínio é baseado em dois princípios: encontrar um algoritmo de aproximação, o que implica a idéia de uma série infinita de etapas que podemos cumprir; o segundo princípio é o raciocínio indireto para chegar à igualdade. Assim, o raciocínio indireto permite uma série infinita de desigualdades se tornar uma igualdade.

Euclides e Arquimedes representam o desfecho de um processo que parece ter-se iniciado no período entre Parmênides e Platão. Vários aspectos lógicos que aparecem na obra dos matemáticos do período helenístico não constam nos fragmentos que restam anteriores a Aristóteles, incluso o método do raciocínio indireto. As pesquisas lógicas parecem ter sido decisivas quanto à construção da matemática a partir de definições, postulados e axiomas.
A noção de incomensurável no livro X, o lema de Arquimedes e o seu método utilizado na quadratura da parábola não aparecem nas demonstrações dos textos matemáticos que restam anteriores ao período helenístico. Arquimedes explica que Demócrito deu a fórmula do volume de uma pirâmide sem demonstração e indica que a primeira demonstração é de Eudoxo[21]. Jean Itard aponta que a demonstração de Eudoxo utilizou propriedades de semelhança e não o procedimento refinado do método de "exaustão".

[21] Arquimedes "Πρὸς ᾿ Ερατοσθένην ἔφοδος)", *La méthode*, Ed. Belles Lettres, Paris 1971, p. 84.

Esses elementos levam a pensar que o raciocínio indireto e os métodos lógicos refinados com séries infinitas de proposições foram utilizados pelos filósofos, os sofistas, bem antes de ter aparecido em demonstrações matemáticas.

Assim, o poema de Parmênides marca o inicio do raciocínio dedutivo e representa um verdadeiro *organon* do pensamento lógico. Esta estrutura de discurso, esta reflexão sobre os princípios e as articulações lógicas do discurso inaugurou um processo que, de Zenão até Platão e Aristóteles, cria as condições que tornam possíveis uma reflexão dos matemáticos sobre a necessidade de uma construção dedutiva, usando demonstrações indiretas, e algoritmos implementando uma série infinita de proposições, aquela que se encontra na exposição e no desenvolvimento da matemática euclidiana e arquimediana. Neste processo, a filosofia, as regras lógicas instituidas pela dialética de Zenão, de Platão e as pesquisas do *Organon* de Aristóteles desempenharam o papel de propedêutica para com a matemática. Este papel não contradiz aquele que Platão atribuía à matemática para com a filosofia. Ele revela apenas o quanto os desenvolvimentos da matemática e da filosofia são interligados.