ARTIGO

MONTENEGRO, Pã, GRIMBERG, Gérard Émile. As Quadraturas de Antifonte e Brison. Anais de Filosofia Clássica 35, 2024. p. 32-69

ANAIS DE FILOSOFIA CLÁSSICA

# As Quadraturas de Antifonte e Brison

**ABSTRACT**: In the first part of this article, we present and contextualise the fragments in which Antiphon and Brison's quadratures of the circle appear in Aristotelian works and those of commentators. We then discuss the debate in the historiography of mathematics about the interpretations of these fragments. Finally, we will offer some reading and interpretation clues that differ somewhat from the academic literature.

**KEY-WORDS:** Squaring the circle; Antiphon; Brison; History of Ancient Philosophy; History of Mathematics.

**RESUMO:** No primeiro momento deste artigo apresentarmos e contextualizamos os fragmentos onde as quadraturas do círculo de Antifonte e Brison aparecem na obra aristotélica e de comentadores. Depois levantamos o debate da historiografia da matemática sobre as interpretações destes fragmentos. Por fim, iremos oferecer algumas pistas de leituras e interpretação que diferem um pouco da literatura acadêmica.

**PALAVRAS-CHAVE:** Squaring the circle; Antiphon; Brison; History of Ancient Philosophy; History of Mathematics.

***Pã Montenegro***

Doutorando em Ensino de Matemática da UFRJ.

https://orcid.org/0009-0002-0570-216X
taiga.montenegro@gmail.com

***Gérard Émile Grimberg***

Professor Associado da Universidade Federal do Rio de Janeiro

https://orcid.org/0000-0003-1075-5530
grimberg@im.ufrj.br

Recebido: 20 de janeiro de 2024
Aprovado: 30 do junho de 2024
DOI: 10.47661/afcl.v18i35.62692

## *Introdução*

Pelo menos desde meados do século V AEC, a ideia da quadratura do círculo é um lugar comum na Grécia Antiga, usada em alusão a algo impossível de realizar, sendo um problema amplamente conhecido pelos gregos, tanto pela elite quanto pela população em geral. A propósito, podemos ver na peça Aves,[1] de Aristófanes (c. 447 - c. 385 AEC), a figura do astrônomo Mêton (c. 450 AEC) como personagem, munido de instrumentos cômicos como uma régua curvilínea para medir o ar, oferecendo suas medições e seu saber sobre como construir a pólis para desenhar a estrutura da cidade utópica proposta na obra.

> MÊTON — Com a régua [curvilínea] meço uma linha,
> E aqui o círculo se torna quadrado[2]
>
> (Aristófanes, Aves, 1005, tradução nossa)

Para que o uso desses instrumentos estranhos, utilizados para quadrar o círculo, tenha o efeito cômico e absurdo proposto por Aristófanes, a imagem da quadratura do círculo está bem colocada perante o público em geral, servindo como uma metáfora do impossível.

Além dessa relação do problema pela população, esta quadratura atraiu o interesse dos matemáticos devido a sua não resolução através das ferramentas da geometria euclidiana, sendo considerado um *problema emblemático* ao longo dos séculos.

O processo da quadratura (τετραγωνισμός) de uma figura plana busca construir um quadrado equivalente em área a figura dada. O interesse pelo estudo de medir áreas remonta a necessidades da

[1] A primeira apresentação da peça é datada em 414 AEC.

[2] ΜΕ ὀρθῷ μετρήσω κανόνι προστιθείς, ἵνα / ὁ κύκλος γένηταί σοι τετράγωνος, κἀν μέσῳ (Aristófanes, 1005).

agrimensura, urbanismo e formação da pólis. No *Decreto de Cirene* (começo do século V AEC) vemos a preocupação com a divisão de terras como uma questão central na colonização da cidade: “os colonos, mantendo o acordo [...] devem participar da cidade e das honras e devem receber uma porção de terras entre as não ocupadas”[3] (Dobias-Lalou, 2017, p. 30-33, tradução nossa).

Um povo que lida com divisão de terras requer conhecimento de áreas e proporção, a fim de permitir a comparação de terrenos com formatos diferentes em relação à variação de solos e disponibilidade de espaços para a partilha. Cirene foi uma das colônias gregas mais proeminentes e prósperas, e se enquadra nesse contexto de colonização que ocorre desde o século VIII AEC, sendo esse processo de divisão de terras comum na formação de novas colônias (Robertson, 2010, p.10-11).

Platão (c. 428 - c. 347 AEC) discute no diálogo *Mênon* (84D-85C) sobre a duplicação da área de um quadrado, onde, através de uma conversa entre Sócrates e um escravo, ele utiliza esse exemplo para sustentar sua tese de que todo o conhecimento se encontra no interior de cada ser e apenas necessita ser descoberto.

Essa passagem salienta a matemática utilizada não como fim, mas como o meio pelo qual Platão articula seus argumentos. Mostra também como a duplicação do quadrado é um problema já resolvido e conhecido pelo círculo de Platão, o qual não era composto apenas por matemáticos, mas por pensadores de diversas áreas. Isso se evidencia porque Sócrates escolhe conversar com o escravo, já que os demais presentes já teriam acesso a essa discussão e à solução do problema. O conceito de quadratura em Platão mostra como a discussão sobre áreas avança no século IV AEC. Assim, vemos que o problema de construção envolvendo áreas e quadratura é bem antigo, mesclando-se e

[3] “Αἰ μὲν δέ κα κατέχ[ων]- τι τὰν οἰκισίαν οἱ ἄποικοι, [τῶν Θηραίων] τὸγ καταπλέον[τα] ὕστερον εἰς Λιβύαν [καὶ π]ọ[λιτήιας] καὶ τιμᾶμ πεδέχ[εν] καὶ γᾶς τᾶς ἀδεσπότω [ἀπολαγ]χάνεν” (Dobias-Lalou, 2017, p. 30-33).

perpetuando-se na cultura grega.

Chegaram a nós poucos fragmentos ou referências à questão matemática sobre a quadratura do círculo na Grécia. No período pré-euclidiano, as menções sobre o problema vêm da obra de Aristóteles (*c.* 384 – 322 AEC) e de seus comentadores, desde Alexandre de Afrodisias (*fl.* II-III EC) até João Filopono (*fl.* VI EC). São citadas as supostas soluções da quadratura do círculo de Hipócrates de Quios (*c.* 450 AEC), Antifonte (*c.* 450 AEC) e Brison (*c.* 400 AEC). Nestes fragmentos, as quadraturas do círculo são citadas de maneira alusiva por Aristóteles, sendo que os processos, em parte, são trazidos pelos comentadores, já tardios.

Limitamos nossa análise às menções das soluções de Antifonte e Brison, pois observamos que esses têm recebido menos atenção por parte da historiografia da matemática em comparação com o trabalho de Hipócrates. Isso nos permite destacar que os métodos propostos nesses casos sugerem uma abordagem geométrica distinta e independente das questões levantadas pelos filósofos a partir do século V AEC. Essas abordagens já incorporavam o raciocínio do contínuo e métodos aproximativos relacionados ao infinito, que preparam e anunciam a elaboração do Método de Exaustão.

Este artigo está estruturado em três partes: primeiro, apresentaremos os fragmentos e, por não serem textos matemáticos, contextualizá-los dentro da obra de Aristóteles, onde as quadraturas do círculo de Antifonte e Brison são utilizadas para reforçar as posições do autor. Depois, levantamos o debate existente na historiografia da matemática sobre as interpretações destes fragmentos. Em seguida, buscamos oferecer algumas pistas de leituras e interpretação que diferem um pouco da literatura acadêmica. Este trabalho não tenta ser exaustivo em abordar todas as análises feitas pela historiografia a esses personagens, mas buscamos trazer algumas tendências de análises destes textos e o confronto entre estas diferentes visões.

## *Exposição das Quadraturas do Círculo*

As três quadraturas mencionadas são apresentadas por Aristóteles de maneira breve e elíptica, como ressalta Paskaleva (2019, p.194), indicando que havia um conhecimento geral entre os estudiosos do Liceu em relação a esses esquemas. Não é de se estranhar esse aspecto lacunar nas exposições, uma vez que essas citações são utilizadas para exemplificar certos vieses lógicos e eram amplamente conhecidos, o que leva a Aristóteles a julgar desnecessário descrever estes raciocínios. No entanto, esta apresentação sucinta nos deixa com material limitado para uma análise aprofundada.

Não existem relatos anteriores documentados dessas quadraturas, e, portanto, nosso conhecimento sobre elas se baseia exclusivamente a partir da obra de Aristóteles.

Vamos examinar os seguintes comentadores que discutiram as quadraturas de Antifonte e Brison em seus relatos: Alexandre de Afrodísias (*fl.* II-III EC), Temístio (IV EC), Simplício da Cecília (VI EC) e João Filopono (VI EC). Todos esses pensadores são associados ao movimento neoplatônico.

Das três quadraturas mencionadas por Aristóteles e subsequentemente comentadas, não iremos focar na de Hipócrates, por considerarmos que existe uma literatura ampla e atualizada que aborda seu problema, como em Knorr (1982), Lloyd (1987) e Høyrup (2019), o que não vemos se aplicar com Antifonte e Brison. No entanto, apresentaremos uma breve visão geral sobre as menções da suposta solução de Hipócrates, já que é mencionada juntamente com as outras quadraturas.

A quadratura proposta por Hipócrates de Quios é nominalmente citada nas *Refutações sofísticas* (*Ref. Soph.* XI. 171b, 10-20). Em dois outros trechos, é mencionada como quadratura por lúnulas (μηνίσκος) nos *Primeiros analíticos* (*An. Pr.* II.25, 69a, 32) e nas *Refutações sofísticas* (*Ref. Soph.* XI. 172a, 2-7); e como quadratura através de segmentos (τμηματα) na *Física* (*Phys*. I.2, 185a, 14–17). Estas últimas referências são associadas ao nome de Hipócrates pelos comentadores.

Alexandre (*Sobre as refutações sofísticas*, 90.8), Temístio (*Sobre a física*, 2.17), Simplício (*Sobre a física*, 53.28) e Filopono (*Sobre a física*, 31.1) convergem ao associar o processo de quadratura de Hipócrates ao estudo das lúnulas e baseiam seus comentários nessa visão. Simplício traz uma exposição mais ampla e detalhada de como Hipócrates teria tentado quadrar o círculo a partir das lúnulas em seus comentários (*Sobre a física*, 56.22).

Esta citação mais extensa dentro da obra de Aristóteles indica como Hipócrates possuía um *corpus* bem elaborado de trabalho e conquistado uma reputação reconhecida no período.

## *Antifonte*

A figura de Antifonte é controversa. Há talvez outros dois Antifontes na historiografia grega, ambos contemporâneos, um conhecido como *Sofista*, autor de alguns tratados sobre a natureza (DK 80B1); e outro como *Orador*, cujos fragmentos incluem discursos proferidos em julgamentos (Antifonte, 1941). Independente disso, Antifonte, pelo menos o que é atribuído à quadratura, viveu na mesma época de Sócrates e Hipócrates, datando de meados do século V AEC (Mueller, 1982, p.148).

A quadratura de Antifonte é mencionada por Aristóteles em sua *Física* (I.2, 185a, 14–17) em conjunto com a quadratura por segmentos. Tratando sobre o início dos estudos sobre a natureza, nessa passagem Aristóteles está elaborando os princípios que irá usar e como trabalhar a partir deles:

> Ao mesmo tempo, não se deve refutar qualquer falsa demonstração, apenas aquelas que partem dos princípios corretos. Assim, o geômetra deve refutar a quadratura por

> meio de segmentos [τμημάτων], mas não a [quadratura] de Antifonte.[4] (Aristóteles, *Phys*. I.2, 185a, 14-17, tradução nossa)

A partir dessa passagem, vemos que Aristóteles considera a quadratura de Antifonte como vinda da sofística e não da matemática. Aliás, Antifonte também é citado nas *Refutações sofísticas* (*Ref. Soph*. XI. 172a, 2-7), juntamente com o nome de Brison, indicando que sua quadratura seria também contenciosa por sair do campo do conhecimento geométrico. Abordaremos essa passagem na próxima seção, que trata do processo de Brison.

Sobre a passagem na *Física*, os comentadores Temístio (*Sobre a física*, 3.5 – 4.8), Simplício *(Sobre a física*, 53.28 – 70.1) e Filopono (*Sobre a física*, 31.1 – 32.5) citam o nome de Hipócrates, associando-o com a quadratura por segmentos. Todos defendem que o erro de Hipócrates teria sido sua conclusão, não violando os princípios da geometria como Antifonte.

Os relatos dos comentadores convergem que o processo da quadratura de Antifonte envolveria inscrever um polígono regular em um círculo e, então, duplicar seus lados. Segundo Temístio, o polígono era um triângulo equilátero, enquanto Filopono afirma que era um quadrado. Já Simplício diz que o polígono inicial poderia ser qualquer figura regular, mas utiliza o quadrado para discorrer. Independentemente da figura escolhida, o raciocínio do problema permanece o mesmo.

Quanto à duplicação dos lados, Temístio descreve a construção de triângulos isósceles sobre cada lado do polígono, com o terceiro vértice pertencendo ao círculo, tangendo-o, fazendo com que o último triângulo coincida com a circunferência.

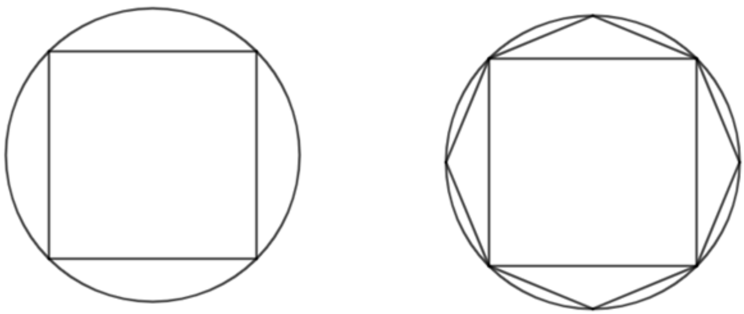
[4] ἅμα δ' οὐνὲ λύειν ἅπαντα προσήκει, ἀλλ' ἢ ὅσα ἐκ τῶν ἀρχῶν τις ἐπιδεικνὺς ψεύδεται, ὁσα δὲ μή, οὔ, οἷον τὸν τετραγωνισμὸν τὸν μὲν διὰ τῶν τμημάτων γεωμετρικοῦ διαλῦσαι, τὸν δ' Ἀντιφῶντος οὐ γεωμετρικοῦ. (Aristóteles, *Phys*. I.2, 185a, 14-17).

> [...] e fazendo isso sucessivamente, pensou que eventualmente o lado do último triângulo, embora fosse uma linha reta, poderia coincidir com a circunferência (Temístio, Sobre a física, 3,5, tradução nossa)

Simplício bissecciona os lados das figuras e traça uma perpendicular (*apótema*) que toca o círculo, e narra que Antifonte acreditava que, ao fazer isso continuamente, *em algum momento* exauriria a superfície do círculo com a figura, devido à pequenez dos lados do polígono que se confundiriam com a circunferência. Termina dizendo que, assim, através dos resultados encontrados nos *Elementos de Euclides* (*fl.* 300 AEC), a quadratura seria possível a partir desse último polígono obtido.

Filopono não específica como ocorreria a duplicação dos lados do polígono, e afirma que Antifonte obtém uma figura com tantos ângulos e alguns deles tão pequenos que os lados coincidiriam com o círculo. Além dessa passagem, Filopono cita Antifonte ao analisar Brison em seus comentários sobre os *Analíticos posteriores* (112.4), dizendo que Antifonte teria tanto inscrito quanto circunscrito uma figural retilínea.

Figura 1 - Esquema da quadratura de Antifonte a partir de um quadrado inscrito



Fonte: elaborado pelos autores

Quanto à problemática levantada por essa construção, Alexandre de Afrodísias, através dos relatos de Simplício, e Filopono afirmam que quando o lado do polígono coincide com a circunferência, essa quadratura vai contra o princípio geométrico de que uma reta tangencia um círculo em apenas um ponto. Simplício argumenta que é óbvio que Antifonte vai contra princípios da geometria, embora não esse debatido por Alexandre, por não se tratar de um princípio, uma vez que o geômetra o demonstra nos *Elementos* (III.16). Ainda, Simplício questiona se a divisão infinita, válida para a reta, é também aplicável à superfície, e indica que o processo de Antifonte atribuiria um final a questão da divisão *ad infinitum*:

> [...] se ele conseguir isso, será abolido o princípio da geometria que diz que magnitudes são divisíveis ao infinito. E Eudemo também diz que esse foi o princípio quebrado por Antifonte (Simplício, Sobre a física, 55.12, tradução nossa).

Temístio também aponta o mesmo princípio como o transgredido por Antifonte, se apoiando no testemunho de Eudemo.

A quadratura de Antifonte também é mencionada pelo matemático Eutócio de Ascalão (*c.* 480), em seus comentários sobre *A medida do círculo de Arquimedes*:

> [...] Pois é óbvio que este é o problema que Hipócrates de Quios e Antifonte se empenharam em resolver e sobre o qual nos deixaram os paralogismos por eles inventados, que creio serem bem conhecidos de quem estudou a história da geometria de Eudemo e que possui o Apiário de Aristóteles[5]

[5] Δῆλον γάρ ὅτι τουτὶ ἂν εἴν τὸ ζητούμενον, ὅπερ Ἱπποκράτης τε ὁ Χῖος καὶ Ἀντιφῶν ζητήσαντες ἐπιμελῶς ἐκείνους ἡμῖν τοὺς παραλογισμοὺς εὑρήκασιν, οὓς ἀκριβῶς εἰδέναι νομίζω τούς τε τὴν Εὐδήμου Γεωμετρικὴν ἱστορίαν ἐπεσκεμμένους καὶ τῶν Ἀριστοτελικῶν μετασχόντας κηρίων (Eutócio, 1972, p. 142a-142b).

(Eutócio, 1972, p. 142a-142b, tradução nossa).

Nesta obra, Arquimedes (*c.* 287 AEC – *m.* 212 AEC) apresenta alguns resultados relacionados ao círculo, como uma relação de aproximação entre o diâmetro e a circunferência, além de afirmar que o círculo tem a mesma área que um triângulo retângulo cujos catetos seriam equivalentes à circunferência e ao raio. Essa igualdade é demonstrada a partir do Método de Exaustão, que Arquimedes atribui a Eudoxo. Com essa associação, Eutócio parece indicar que o esquema inicial de Hipócrates e Antifonte lembra essa solução de Arquimedes sobre a medida do círculo, sendo que o que faltaria seria o Método de Exaustão, que consiste em resolver esquemas infinitos através de um raciocínio por absurdo.

Esse trecho de Eutócio, contemporâneo a Simplício e Filopono, indica uma visão mais receptiva da proposta de Antifonte pelo meio matemático. A obra *Apiário de Aristóteles* trazida no relato é uma obra perdida de Esporo de Niceia (c. 250 EC), uma compilação diversificada que continha alguns problemas matemáticos, como a duplicação do cubo e a quadratura do círculo (Tannery, 1912, p. 178-184).

## *Brison*

Brison enfrenta o mesmo problema biográfico que Antifonte, sendo que há dúvidas se o filósofo Brison de Heracleia é o mesmo discutido aqui por Aristóteles. É tradicionalmente datado como contemporâneo a Platão, vivendo na transição entre o século V para o IV AEC, podendo ter sido discípulo de Sócrates ou de Euclides de Mégara (Mueller, 1982, p. 148).

Nas *Refutações sofísticas*, discursando sobre argumentos contenciosos, Aristóteles apresenta a quadratura de Brison como sendo um sofisma.

> [...] como a quadratura do círculo proposta por Brison que, mesmo sendo conclusiva, não se baseia na geometria, se tratando então de um sofismo[6] (Aristóteles, Ref. Soph. XI, 171b, 19-20, tradução nossa).

E se aprofunda, atrelando esse argumento contencioso também a Antifonte, e em oposição ao método das lúnulas, atribuído a Hipócrates pelos comentadores:

> Por exemplo, a quadratura [do círculo] por meio das lúnulas [μηνίσκων] não é contenciosa, enquanto que o de Brison é contenciosa. Não é possível transferir a primeira [quadratura] para fora da geometria por ter como base princípios peculiares a geometria, enquanto que a segunda [de Brison] pode ser utilizada em um embate contra vários, em especial com os que não sabem o que é aplicável a cada área e o que não é aplicável. Pois parece fazer sentido. Da mesma forma, ocorre ao modo como Antifonte realizou a quadratura[7] (Aristóteles, Ref. Soph. XI. 172a, 2-7, tradução nossa)

A ideia de usar uma questão matemática em um debate, como indicado nesse trecho, nos remete a prática da retórica sofística. Aristóteles também aborda nos *Analíticos posteriores* a questão de que as premissas das demonstrações não bastam ser verdadeiras e imediatas, mas também devem ser inerentes à sua própria ciência.

> [Sobre utilizar princípios de outras áreas do conhecimento

---

[6] ἀλλ' ὡς Βρύσων ἐτετραγώνιζε τὸν κύκλον, εἰ καὶ τετραγωνίζεται ὁ κύκλος, ἀλλ' ὅτι οὐ κατὰ τὸ πρᾶγμα, διὰ τοῦτο σοφιστικός (Aristóteles, *Ref. Soph.* XI, 171b, 19-20).

[7] οἷον ὁ τετραγωνισμὸς ὁ μὲν διὰ τῶν μηνίσκων οὐκ ἐριστκός, ὁ δὲ Βρύσωνος ἐριστικός· καὶ τὸν μὲν οὐκ ἔστι μετενεγκεῖν ἀλλ' ἢ πρὸς γεωμετρίαν μόνον διὰ τὸ ἐκ τῶν ἰδίων εἶναι ἀρχῶν, τὸν δὲ πρὸς πολλούς, ὅσοι μὴ ἴσασι τὸ δυνατὸν ἐν ἑκάστῳ καὶ τὸ ἀδύνατον· ἁρμόσει γάρ. ἢ ὡς Ἀντιφῶν ἐτετραγώνιζεν. (Aristóteles, *Ref. Soph.* XI. 172a, 2-7).

> em uma demonstração] Portanto é possível que alguns busquem mostrar coisas desta forma, tal qual Brison fez com sua quadratura[8] (Aristóteles, An. Post. I.9, 75b, 40, tradução nossa).

Comentando a primeira passagem, Alexandre (*Sobre as refutações sofísticas*, 91.21) diz que a quadratura proposta por Brison é, além de sofística, erística, pois se baseia em princípios que vão além da geometria.

O comentário de Alexandre sobre a segunda passagem se perdeu, mas foi registrada pelo relato de Filopono (*Sobre os analíticos posteriores*, 111.3 – 118.1), que também narra outros dois modos de abordar a quadratura de Brison: um de Siriano de Alexandria (*m.* 437) e outro de Proclo (século V). É interessante notar que Siriano teria sido mestre de Proclo. Da mesma forma, Proclo teria sido professor de Amônio de Hérmias, este último professor de Filopono (Gillispie, 1980, p. 134).

Alexandre explica que a quadratura de Brison envolve circunscrever e inscrever um quadrado em um círculo e, então, tomar um quadrado intermediário entre o inscrito e o circunscrito. Assim, como o quadrado e o círculo são ambos maiores que o quadrado inscrito e menores que o quadrado circunscrito, eles são iguais entre si. Dessa forma, o princípio utilizado por Brison seria *que coisas que são maiores e menores a mesma coisa, são iguais entre s*i. Filopono, ao citar Alexandre, menciona o mesmo processo, mas sem fazer referência a uma figura específica.

Siriano discorda de Alexandre, afirmando que, se Brison fez isso, sua quadratura vai em encontro com a de Antifonte. Como Aristóteles trata as quadraturas de Antifonte e Brison de maneira distinta, a abordagem de Brison difere da narrada por Alexandre. Siriano sugere, atribuindo esse pensamento a Amônio, que o processo de Brison

[8] ἔστιν γάρ οὕτω δεῖξαι, ὥσπερ Βρύσων τὸν τετραγωνισμόν (Aristóteles, *An. Post*. I.9, 75b, 40).

provaria que é possível ter um quadrado igual ao círculo, sem, no entanto, mostrar ou indicar como *traçar* efetivamente um quadrado igual ao círculo.

Filopono vai contra essa interpretação dizendo que, se Brison tivesse procedido dessa forma, ele não provou nada, apenas forçou a questão. Ele também comenta de maneira geral e sem mencionar nomes as tentativas de quadratura do círculo, dizendo que aqueles que tentaram isso não investigaram se esse quadrado equivalente de fato existe, mas partiram da premissa de que era possível. Filopono conclui mencionando que Aristóteles trata Brison como se ele tivesse efetivamente quadrado o círculo, mesmo que Brison não tenha feito isso geometricamente. Portanto, a explicação de Siriano não parece ser verídica para o comentador.

Proclo, por sua vez, se aproxima da abordagem de Alexandre, mas propõe outro princípio: *um círculo é maior do que qualquer figura retilínea inscrita e menor do que qualquer figura circunscrita*. Dessa forma, *quando há coisas maiores e menores do que outras, também há algo igual a essa coisa*. No entanto, ele afirma que esse princípio não é válido para coisas que não são da mesma categoria. Através de um contraexemplo, Filopono conclui que esse princípio é verdadeiro para coisas homogêneas e não para coisas heterogêneas, como o retilíneo e o curvilíneo.

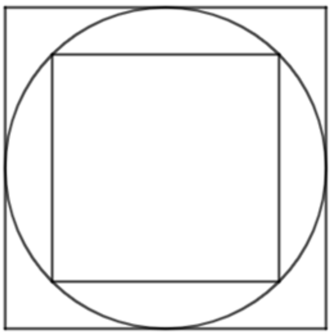


Figura 2 - Esquema da quadratura de Brison

Alexandre levanta que o problema do processo de Brison é o princípio que ele utiliza, pois, mesmo que em algum momento o círculo e o quadrado sejam iguais, isso decorre de princípios falsos e mais abrangentes do que os da geometria. Mais abrangentes no sentido de que o argumento pode ser aplicado a números, ao tempo, ao espaço e outras entidades. Falsas pois, por exemplo, oito e nove são ambos maiores que sete e menores que doze, mas isso não os torna iguais.

Proclo também declara falso o princípio proposto por ele: não é verdade que coisas maiores e menores do que as mesmas coisas são iguais entre si. Ele retoma a justificativa numérica de Alexandre, onde dez é maior do que oito e menor do que doze, da mesma forma que o nove, mas obviamente eles não são iguais entre si. Afirma que duas figuras entre figuras inscritas e circunscritas não são automaticamente iguais, a menos que sejam construídas da mesma maneira que Antifonte procedeu com sua quadratura, onde as figuras coincidem entre si. Proclo conclui que isso é impossível, pois uma linha reta nunca poderia coincidir com a circunferência.

## *A Quadratura na História Recente da Matemática*

As discussões e interpretações destes fragmentos de Aristóteles e de seus comentadores pela historiografia se centram, ao decorrer das décadas, principalmente ao método atribuído a Hipócrates para a quadratura do círculo, conforme vemos nos trabalhos de Poste (1866), Heath (1921), Knorr (1982), Lloyd (1987) e Høyrup (2019).

Heath ressalta que "Hipócrates entrou na lista [de Proclo], não devido a seu trabalho com as lúnulas, mas por ele ter sido um geômetra distinto e o primeiro a escrever Elementos" (Heath, 1921, p.171, tradução nossa). A figura de Hipócrates na matemática não se limita apenas à sua tentativa de quadratura. A ele é creditado diversos outros trabalhos, notadamente a escrita dos Elementos, mencionada por Heath, que, embora talvez não tenha sido uma obra com esse título específico, provavelmente se tratou de um primeiro compilado geométrico ao estilo dos *Elementos* de Euclides. Isso lança uma luz mais ampla sobre a figura de Hipócrates e seu papel na geometria de sua época.

Devido às dificuldades biográficas que envolvem Antifonte e Brison, nossa capacidade de relacionar outros materiais ou evidências a esses fragmentos fica limitada, o que, por sua vez, impede uma expansão mais significativa de nossa compreensão do caso. Essa limitação, somada à escassez de fontes primárias e à forma alusiva e distante que Aristóteles e seus comentadores apresentam esses textos, resulta em uma análise mais restrita, com um número limitado de acadêmicos que ofereceram análises e interpretações desses processos. Selecionamos os seguintes autores que abordam uma análise e interpretação de Antifonte e Brison: Heath (1921; 1949), Wasserstein (1959), Mueller (1982) e Knorr (1982; 1986).

Ao abordar o problema da quadratura do círculo, Heath (1921, p. 220–235) ressalta que mesmo que os estudos tenham envolvido diversos pensadores notáveis da época (V–IV AEC), o problema exercia um grande fascínio sobre a comunidade grega como um todo, sugerindo que talvez a própria população não matemática se interessou mais pela emblemática do problema do que os próprios matemáticos (HEATH, 1921, p. 220). Ele também observa o fato curioso de que Aristóteles e seus comentadores se concentrarem exclusivamente com as quadraturas de Hipócrates, Antifonte e Brison, e esquecerem de outros casos, como o de Hípias (Heath, 1949, p.2).

Wasserstein, ao buscar reconstruir a relação histórica entre as tentativas de quadratura do círculo, comenta em uma nota de rodapé que Hipócrates provavelmente já tinha ciência de que métodos planos não seriam suficientes para quadrar o círculo, o que revela o grau de profundidade das reflexões matemáticas no século V AEC (Wasserstein, 1959, p.92).

Em seu artigo, Mueller destaca que “[a] hipótese de que

Aristóteles não conheceu nenhuma quadratura 'real' é de interesse não apenas da história da matemática grega, mas também para a compreensão das atitudes de Aristóteles em relação ao problema" (Mueller, 1982, p.147, tradução nossa). Sua perspectiva parte do pressuposto de que as observações feitas por Aristóteles e seu pupilo Eudemo sobre as quadraturas são informações primárias de alta veracidade, enquanto os relatos dos comentadores têm importância secundária (Mueller, 1982, p.149).

Por fim, Knorr analisa as quadraturas de Antifonte e Brison em duas obras distintas (Knorr, 1982; 1986), dedicando atenção central a uma quadratura por vez e oferecendo suas análises, interpretações e comentários detalhados sobre cada uma delas.

## *Antifonte*

Heath argumenta que tanto Aristóteles quanto os comentadores fazem objeções a Antifonte apenas verbalmente, destacando que a mesma dificuldade e *intensidade* são aplicados à abordagem de Zenão e Demócrito (Heath, 1949, p. 96). Além disso, o processo de Antifonte é o mesmo utilizado por Euclides na proposição XII.2 dos Elementos, onde ambos consideram o círculo como o *limite* de um polígono inscrito com um número crescente de lados (Heath, 1921, p. 220). Portanto, Antifonte mereceria um espaço honorável dentro da história da geometria. Além desse fato, esse método parece ter originado a ideia de exaurir uma área, ideia a qual Eudoxo teria estruturado seu método de Exaustão posteriormente e que, através dele, demonstrado a proposição XII.2 dos *Elementos*, e o volume da pirâmide e do cone (Heath, 1949, p.97).

Heath também destaca que o valor prático de Antifonte se mostra pela construção de Arquimedes na *Medida do círculo*, que inscreve polígonos. Em outra passagem, tratando sobre a ideia de infinitesimais nos paradoxos de Zenão, Heath afirma que Antifonte foi o primeiro a indicar o caminho correto por onde a solução da quadratura pode ser encontrada, provocando criticismo de mentes lógicas que não acompanharam essa mudança de perspectivas (Heath, 1921, p.271).

Wasserstein (1959, p. 94) concorda com Heath (1921; 1949) ao afirmar categoricamente que Antifonte quis dizer que o círculo é o limite da figura inscrita quando o número de lados cresce indefinitivamente, e não que as retas do polígono ficariam tão pequenas a ponto de coincidir com a circunferência, o que obviamente é uma falácia já que o processo nunca acaba.

Partindo do comentário de Alexandre, Wasserstein sugere que Antifonte provavelmente foi além do que geralmente lhe é proposto, pois um geômetra bom ao ponto de conceber a noção fundamental de limite e ver que o círculo é o limite da figura inscrita, também nota que o círculo é o limite da figura circunscrita, *afinando* sua ferramenta pelos dois lados (Wasserstein, 1959, p. 95).

Dessa forma, segundo Wasserstein, o comentário de Alexandre ganha sentido, pois o polígono inscrito sempre irá tanger o círculo através de um ponto, enquanto que o circunscrito tangencia através de um ponto médio de uma reta. A objeção de Alexandre então equivaleria ao seguinte: como uma tangente toca o círculo em um ponto apenas, e a tangente é uma linha reta, e uma reta nunca pode se tornar um ponto através da divisão ao infinito, nunca se conseguirá obter um polígono que coincida com a circunferência. E assim esse caso seria tal qual a objeção de Eudemo (Wasserstein, 1959, p. 95).

Ao fim deste argumento, Wasserstein traça uma forçosa relação de que, dentro dessa visão, Antifonte como matemático teria lançado "[...] os fundamentos do que hoje chamamos de cálculo" (Wasserstein, 1959, p.95, tradução nossa), e conclui afirmando que esse pensamento, sendo valido ou não, torna a crítica de Alexandre mais condizente. De toda forma, Antifonte trabalharia com a ideia de exaustão.

Mueller (1982), ao começar sua análise, diz que mesmo que diferentes figuras façam críticas diferentes a Antifonte, elas convergem no ponto em que uma magnitude geométrica é composta por um número finito de partes mínimas (Mueller, 1982, p.155). Essa unanimidade faz com que seja razoável supor que Aristóteles tinha o mesmo criticismo em mente.

Ainda afirma que Antifonte poderia ter sido motivado pelo mesmo empirismo associado a Protágoras e sua concepção de relação entre círculo e reta apontado por Aristóteles em sua *Metafísica* (*Metaph.* III.2, 997b32-998a4) (Mueller, 1982, p.155). Isso é, que Antifonte não considerava uma diferença perceptível entre o círculo e o polígono de muitos lados. Uma outra possibilidade seria Antifonte ter usado um atomismo matemático. Mas em todo o caso, não teria envolvido uma noção genuína de infinitesimais ou de processos infinitos, indo contra a tentativa de Heath de apresentar Antifonte de forma mais positiva para a matemática.

Nessa construção, segundo Mueller, Antifonte tentou exaurir o círculo, literalmente, mas não estabelecendo a analogia com o processo de Eudoxo. Mueller argumenta que o ponto de vista matemático e atomista dos dois seriam divergentes, onde o de Antifonte beira o empirismo, o que faz com que essa hipótese pareça acidental, não proposital (Mueller, 1982, p.156).

Knorr (1982) aborda a quadratura de Antifonte no contexto das ferramentas matemáticas disponíveis no século V AEC, bem como a relação entre matemática e filosofia. Também parte do pressuposto que os comentadores trazem corretamente as citações e que seguem os apontamentos de Eudemo sobre as quadraturas.

Ele argumenta que Hipócrates elaborou a proposição XII.2 dos *Elementos*, que estabelece que dois círculos estão para si como o quadrado de seus diâmetros, de forma similar à como é encontrada na obra de Euclides séculos depois (1982, p. 123), e que o Lema de Arquimedes (X.1) pareceria um princípio óbvio e que não requereria prova para Eudoxo (Knorr, 1982, p.125). Knorr enfatiza que essa proposição XII.2 é uma forma de quadratura.

A elaboração de Hipócrates dessa proposição estaria ligada ao processo de exaustão, onde o círculo é visto como o limite de polígonos regulares inscritos nele (Knorr, 1982, p. 127), o que mostra como Hipócrates dominou uma parte significativa da geometria plana.

Analisando o relato de Simplício sobre Antifonte e a demonstração da proposição XII.2 nos *Elementos*, Knorr conclui o quanto as argumentações são próximas, comentando como a primeira parte do raciocínio de Antifonte seria perfeita, justamente pela proximidade à proposição XII.2. Citando Heath, afirma que, por isso, Antifonte ganharia um lugar honorável na história da matemática. No entanto, a segunda parte de seu raciocínio seria um desastre, pois Antifonte teria acreditado que esse limite seria alcançado em passos finitos.

Em defesa a essa estrutura escolhida por Antifonte, Knorr afirma que seu objetivo não seria a geometria, por ele ser um sofista, com interesses em ética e epistemologia. No argumento do círculo, Knorr detecta uma influência do pensamento atomista (Knorr, 1982, p.132), onde os aspectos cognitivos e da perspectiva sensorial não seriam distintos, o que faz com que o argumento de Antifonte não seja claro.

No entanto, esse raciocínio exposto iria remeter a questão do embate entre sensorial e cognitivo, epistemologicamente válida e significativa dentro da filosofia. Sendo assim, o argumento de Antifonte teria origem geométrica, mas não fim. Por fim, Knorr postula que Antifonte conheceria bem esse problema, talvez retirando do modelo do próprio Hipócrates, aproximando assim os dois processos.

## *Brison*

Sobre a proposta de Brison, Heath afirma que algumas interpretações assumiram que, para encontrar o quadrado intermediário ou se deveria calcular a meia aritmética entre a figura inscrita e a circunscrita ou a meia geométrica. No entanto, Heath argumenta que ambas as interpretações parecem ser equívocos sobre a intenção de

Brison (Heath, 1921, p. 223).

Heath desenvolve o argumento de que nenhum dos comentadores realmente compreendeu a proposta de Brison. Ele alega que Brison foi além de Antifonte, repetindo o processo deste último, mas agora também circunscrevendo um polígono ao círculo. Portanto, Heath defende que Brison também não deveria ser banido da história da matemática grega, pois teria aprimorado o método de Antifonte. Além disso, Heath destaca que o mesmo princípio se manifesta na obra de Arquimedes, o que prova o valor prático de Brison, já que ocorre uma compressão de valores, característica distinta dentro da obra de Arquimedes (Heath, 1921, p. 224-225).

Heath sugere que a distinção feita por Aristóteles entre as críticas a Antifonte e Brison indica que o estagirita não veria problema com o princípio usado por Brison em si, mas com sua aplicação além do campo da geometria. No entanto, devido à falta de informações detalhadas sobre o método de Brison, é difícil julgar até que ponto a objeção de Aristóteles era válida (Heath, 1949, p.47-50).

Essa proposta de Heath em relação a Brison entra em contradição direta com a interpretação de Wasserstein sobre Antifonte. Para contornar isso, Wasserstein observa que os relatos de Brison apontam apenas três figuras: o polígono inscrito, o polígono circunscrito e a figura intermediária. Não há evidências de que Brison tenha usado mais figuras ou realizado uma exaustão da área do círculo. Portanto, a interpretação de Heath sobre Brison pode não ser sustentável à luz das evidências disponíveis.

Wasserstein propõe que Brison poderia ter adotado uma abordagem distinta. Uma interpretação sugerida, trazida por Becker, seria que o relato de Proclo se assemelha ao postulado de continuidade de Dedekind, embora o próprio Dedekind tenha rejeitado essa ideia (Wasserstein, 1959, p.98). Wasserstein vê coerência na proposta do processo de Brison como uma questão de *existência*, não um método de construção. No entanto, observa que o relato de Filopono sobre Amônio afirma claramente que Brison propôs algo que envolve mais que meramente uma declaração de existência.

Wasserstein postula que Brison poderia ter trabalhado com algum tipo de meia proporcional, mas não a aritmética ou a geométrica como levantada por Heath, uma vez que o estudo da teoria das proporções *estava no ar* no período. Nesse contexto, seria possível que Brison buscou combinar proporções, algo semelhante ao que Hipócrates fez na redução da duplicação do cubo, a fim de encontrar o polígono intermediário (Wasserstein, 1959, p.100).

Wasserstein conclui sugerindo que Brison pode ter esperado incluir esse estudo a estrutura da teoria das proporções, observando algum tipo de proporção, como a qual hoje chamamos de π, como o termo médio entre as figuras inscritas e circunscritas (Wasserstein, 1959, p.100).

Portanto, Brison teria tentado reduzir um problema a outro por meio das proporções, distinguindo-se assim da linhagem de Antifonte, Eudoxo e Arquimedes, sendo assim um pensador original de alta qualidade (Wasserstein, 1959, p. 100).

Mueller (1982) destaca que a variação nos relatos sobre Brison dificulta analisá-lo e chegar a alguma conclusão, se inclinando a afirmar que não há fontes diretas, matemáticas, históricas ou filosóficas que nos permitam preferir alguma das versões propostas pelos comentadores. No entanto, afirma que a versão de Proclo se encaixa melhor com a crítica de Aristóteles (MUELLER, 1982, p.160).

Ele, então, busca esclarecer a interpretação de cada comentador sobre o princípio utilizado por Brison: Alexandre diria *que coisas maiores e menores que a mesma coisa são iguais entre si*. Temístio que *coisas das quais a mesma coisa são maiores e menores são iguais entre si*. E Proclo *que há algo igual aquilo do qual há algo maior e menor*.

Ao analisar esses princípios, ele diz que Alexandre parece não condizer com Aristóteles, pois ele aponta um princípio falso para números e figuras planas. Temístio iria de encontro à ideia de tomar o círculo como limite entre a figura inscrita e circunscrita.

O princípio de Proclo apontaria diretamente a uma intuição sobre continuidade, de que não haveria lacunas nas áreas das figuras retilíneas intermediárias (Mueller, 1982, p.162). Mueller diz que a mesma interpretação pode ser tirada do princípio trazido por Temístio, mas que a versão de Proclo tem a vantagem da simplicidade, eliminando a estranha referência de desenhar uma figura igual ao círculo. A crítica de Aristóteles ao processo de Brison viria por ele relacionar o polígono com o círculo, ou seja, o retilíneo com o curvilíneo, onde a dificuldade seria aplicá-lo simultaneamente às figuras, mas, segundo o comentador, ele nega implicitamente que o círculo seja uma magnitude (Mueller, 1982, p.163).

Mueller critica a hipótese de que Brison seria um refinamento do processo de Antifonte, dizendo que isso não se daria, já que Aristóteles faz críticas distintas a ambos.

Por fim, ainda explorando a questão da construção de Brison, diz que Filopono insiste, pela versão de Proclo, que a construção seria não construtiva, por ver como filósofos construtivistas argumentam que provas não construtivas adicionam pouca informação para serem consideradas adições genuínas ao conhecimento (Mueller, 1982, p.164).

Dessa forma, Mueller sugere várias interpretações para Brison, seguindo uma tendência para o relato de Proclo, mas sem concluir algo, devido à falta de informações e relatos.

Knorr (1986), em outra obra, mantém sua opinião sobre Antifonte e sua relação com Hipócrates, explorando mais o procedimento por lúnulas. Sobre Brison:

> Dessa forma, um procedimento Weierstrassiano para definir a magnitude do círculo pode ser antecipada, embora vagamente, na abordagem de Brison. Esta é a interpretação adotada por alguns escritores modernos. Mas devemos observar que os comentadores antigos de Brison parecem não ter uma explicação sólida dos detalhes de seu argumento e

> não fornecem eles próprios uma declaração precisa de seu princípio e uma forma válida de sua aplicação, apesar de sua familiaridade com os métodos de limites na tradição após Eudoxo (Knorr, 1986, p. 77, tradução nossa).

Aqui, Knorr salienta que os comentadores parecem não ter ou um domínio pleno do processo de Brison, não compreendendo seu raciocínio, ou talvez não tivessem acesso à versão original. De toda forma, essa questão destaca como os comentadores estavam imersos nos conceitos aristotélicos, buscando não questionar a validade das afirmações do estagirita frente a pesquisas matemáticas posteriores, mas apenas elucidá-las.

Mesmo considerando Brison um filósofo, Knorr (1982; 1986) aponta que ele não forneceria uma explicação plenamente satisfatória nem para os filósofos nem para os geômetras da antiguidade. De toda forma, seu processo refletiria um interesse entre os geômetras do século IV AEC, com questões formais implicadas em suposições que problemas como a quadratura tinham solução.

## *Questões Abertas*

Nas duas partes anteriores, apresentamos os fragmentos da obra de Aristóteles relacionados à quadratura do círculo, bem como os respectivos relatos dos comentadores tardios, e as interpretações e posicionamentos da historiografia da matemática recente em relação aos processos de Antifonte e Brison. Neste percurso, algumas questões surgiram a partir destas leituras: a interpretação do infinito na obra de Aristóteles; a discussão sobre provas de existência no período; e o papel dos comentadores nas interpretações atuais.

Aristóteles busca estabelecer o conceito de infinito, assim como seus parâmetros e processos que o envolvem, ao longo de toda sua obra, especialmente no livro III de sua *Física*. O termo usado por Aristóteles para designá-lo (ἄπειρος) deriva da negação do termo para limite ou fim (πέρας), sendo "*ilimitado*" uma interpretação possível (Conford, 1952, p. 172-175). Vemos que este termo se alinha com a afirmação do estagirita de que nada que não tenha fim é perfeito, com o fim sendo um limite (*Phys*. III.6, 207a, 10-15).

Aristóteles liga a questão do infinito à questão do contínuo, dizendo que uma grandeza contínua, que seria em geral qualquer objeto geométrico, é divisível ao infinito. Para ele, dividir ao infinito e a continuidade seriam esquemas equivalentes. No entanto, isso não vale para os números racionais, que são divisíveis ao infinito mas não são contínuos.

Para Aristóteles, o tempo e a divisão de magnitudes, por exemplo, são tratadas como coisas infinitas (*Phys*. III.4, 203b, 16 – 30). O infinito não seria, assim, uma substância (οὐσία), devendo existir em potência, possibilitando questões como a divisão de uma reta ao infinito, mas não em ato, já que não há um limite para essa divisão (*Phys*. III.5, 204a, 20-33). Portanto, o infinito não existiria em nosso mundo físico, mas seria necessário em algumas circunstâncias, como na discussão do tempo ser limitado, o que também corrobora para sua existência em potência (*Phys*. III.5, 206a, 5-10).

Aristóteles também argumenta que não podemos somar magnitudes infinitamente fora do âmbito matemático, pois se uma magnitude física existe em potência, ela também pode existir em ato. Assim, teoricamente, poderíamos somar quantas magnitudes quiséssemos, o que nos levaria a ultrapassar a altura do céu (*Phys*. III.7, 207b, 15-22). Em resumo, a manipulação do infinito ocorreria apenas de maneira prática, permitindo alguns conceitos e usos, como nas questões matemática.

O raciocínio ao infinito também é ligado ao fato de enunciar uma infinidade de proposições. Então Aristóteles faz uma confusão com o fato de pensar no enunciado uma infinidade de proposições e o resultado em ato. O raciocínio pela exaustão consiste justamente em trazer uma infinidade de proposições no enunciado e conseguir lidar com isso.

Aristóteles demonstra, com essas posições, uma visão sobre o infinito e ilimitado que difere das nossas concepções atuais e aplicações na física e na matemática. Não sabemos como os matemáticos do período pensavam sobre isso antes de Aristóteles, mas temos algumas menções, como a de Protágoras e a questão da tangente (*Metaph*., III.2, 997b32-998a4), e Demócrito com o volume do Cone e da Pirâmide (*Método*, Arquimedes), que mostram como essa questão era debatida.

Knorr (1982) discute os comentários de Aristóteles sobre Zenão e aponta:

> É difícil acreditar que um geômetra poderia ter sido a fonte definitiva desse tratado de Aristóteles; pois um geômetra certamente entenderia que um todo infinito pode ter uma parte infinita [...] mais significativamente, Aristóteles falhou em isolar a dificuldade lógica essencial do argumento de Zenão (Knorr 1982, p. 119, tradução nossa).

A ideia de infinito em ato, fundamental para a geometria, e a negação de sua existência por Aristóteles, revelam uma dificuldade em lidar com a manipulação do infinito. Knorr (1982) analisa os argumentos matemáticos de Aristóteles e observa que ele detinha de acesso à terminologia formal e às técnicas matemáticas, como a teoria das proporções, mas parece não ter um domínio matemático para lidar com Zenão. "A teoria de Aristóteles sobre o infinito demonstra uma notável insensibilidade às questões que devem ter ocupado os geômetras de sua geração" (Knorr, 1982, p. 122).

Knorr conclui esse pensamento inicial afirmando que Aristóteles usou a matemática para abordar suas questões filosóficas, o que não reflete o contexto em que essas técnicas foram inventadas nem os motivos por trás de sua invenção: "A hipótese familiar de um 'horror ao infinito' entre os geômetras gregos é um mito absurdo cuja derrocada só pode ser bem-vinda" (Knorr, 1982, p. 143).

Knorr argumenta que, dentro do campo da matemática, houve momentos antes e depois de Aristóteles nos quais a manipulação e interpretação do infinito eram diferentes. Podemos mencionar brevemente os nomes de Demócrito, Eudoxo e Arquimedes. Dentro de nossa análise, também consideramos a tradição revelada pelos processos de Antifonte e Brison.

Sobre construção de existência, Filopono, em seus comentários (*Sobre os analíticos posteriores*), levanta essa discussão dentro da busca pela solução da quadratura do círculo:

> Aqueles que tentaram quadrar o círculo não se perguntaram se é possível que um quadrado seja igual a um círculo, mas supondo isso, tentaram assim produzir um quadrado igual ao círculo (FILOPONO, Sobre os analíticos posteriores, 112.21, tradução nossa).

Nesse trecho, Filopono parece compartilhar sutilmente a visão de Aristóteles, conforme apresentada nas *Categorias*, de que a quadratura do círculo não foi alcançada:

> [...] mesmo não havendo conhecimento, isso não impede que algo seja conhecível, como. Por exemplo, a quadratura do círculo: embora não haja um conhecimento disso ainda, o próprio objeto ainda é conhecível[9] (Aristóteles, Cat. VII, 7b, 30-33, tradução nossa).

Se Filopono compartilha da posição de Aristóteles sobre esse tema, então o comentador ignora outros processos e estudos sobre a quadratura do círculo, como Hípias, Arquimedes e Nicomedes. Neste

---

[9] ἐπιστήμης δὲ μὴ οὔσης οὐδὲν κωλύει ἐπιστητὸν εἶναι, οἷον καὶ ὁ τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸς εἴγε ἔστιν ἐπιστητόν, ἐπιστήμη μὲν αὐτοῦ οὐκ ἔστιν οὐδέπω, αὐτὸς δὲ ἐπιστητόν ἔστιν (Aristóteles, *Cat.*, VII, 7b, 30-33).

quesito, Simplício observa justamente esse ponto em Aristóteles:

> Aparentemente, Aristóteles não soube como fazer isso [quadrar o círculo]. Mas Jâmblico diz que os Pitagóricos descobriram isso: "como está claro pelas provas de Sexto, o Pitagórico, que recebeu o método dessa demonstração da antiga tradição. E depois, Arquimedes o fez por meio da curva espiral, Nicomedes através pela curva conhecida pelo nome de Quadrátrix, Apolônio utilizou uma determinada curva a qual ele mesmo a chamou irmã da Coquilóide, mas a qual é a mesma que a curva de Nicomedes, Carpo por meio de uma curva que ele simplesmente chama que surge através do movimento duplo, e muitos outros construíram a solução desse problema de várias maneiras". Esse é o relato de Jâmblico. (Simplício, Sobre as categorias, 192.15-25, In: THOMAS, 1939, p. 334-335, tradução nossa)

Vemos que diversos estudos após Aristóteles foram realizados sobre o tema, compilados por Jâmblico e trazidos por Simplício. Também observamos como os estudos tomaram o uso de curvas superiores para a solução do problema, não se limitando aos métodos planos da geometria euclidiana.

Essa passagem nos leva à questão da existência do quadrado resultante da quadratura do círculo. Portanto, é natural voltarmo-nos justamente à essa reflexão entre construção e existência, levantada no comentário de Proclo sobre Brison.

Uma discussão sobre construção e existência na Grécia Antiga pode ser vista em Zeuthen (1896) e Knorr (1983). Zeuthen (1896) propõe a tese de que as construções geométricas devem ser entendidas como provas de existência na tradição da matemática grega. Se é possível construir, existe. Quase um século depois, Knorr (1983) busca refutar essa tese, oferecendo uma nova visão:

> algumas questões centrais relativas à existência foram tratadas por meio de postulados ou suposições tácitas, ao invés de construções explícitas; [...] quando as construções foram dadas, o motivo residia em seu interesse intrínseco pelos antigos geômetras (KNORR, 1983, p. 115).

Defendendo então que a questão da existência seria separada da construção.

Uma das facetas disso seria a preocupação estritamente técnica de estabelecer que determinados problemas teriam sua solução dentro de parâmetros estabelecidos. Esse aspecto técnico teria pouco interesse para os filósofos. A conclusão de Knorr é que as questões existenciais seriam apenas explicitadas quando não parecessem óbvias.

As teses de Knorr e Zeuthen se mostram contrapostas, principalmente no que diz respeito ao papel central da questão da construção. Preferimos aderir à defesa de Knorr, concordando que a prova de existência serve para esclarecer questões que não são óbvias durante a construção de figuras. Quando tomamos a Espiral de Arquimedes e a *Quadrátrix*, diversas características matemáticas são deduzidas a partir delas, mas ambas são impossíveis de se construir, o que não torna os resultados atrelados a elas inválidos.

Em relação aos comentaristas, todos eles buscam justificar os conceitos de Aristóteles fazendo referência a autores posteriores a ele, como Euclides. No entanto, não há uma reflexão sobre como conteúdos aos quais Aristóteles não teve acesso, especialmente na matemática, poderiam impactar negativamente seu entendimento de seus próprios elementos, como por exemplo, Simplício ao citar Euclides (Simplício, *Sobre a física*, 55.12) ao discutir Antifonte.

Ao analisar os relatos dos comentaristas, percebemos uma grande variação em relação a alguns detalhes técnicos frente às quadraturas de Antifonte e Brison. Embora os comentadores concordem em pontos centrais, divergem quanto à forma de proceder com a demonstração. Ao nosso ver, isso sugere a existência de diversas tradições que reconstruíram as práticas de Antifonte e Brison,

Em particular, Knorr (1982) e Mueller (1982) alertam para a possibilidade dos comentadores terem interpretado erroneamente o relato de Hipócrates. Atualmente, a historiografia sugere que a proposta de Hipócrates não envolvia a quadratura por meio das lúnulas, a partir de um entendimento ambíguo pelos comentadores da partícula ἢ.

> [...] como a [quadratura] de Hipócrates, ou [ἢ] a quadratura por meio das lúnulas [μηνίσκων][10] (Aristóteles, Ref. Soph. 171b, 15-16, tradução nossa)

lógico-matemáticos presentes na demonstração da quadratura trazida por Simplício não condiz com tal afirmação.

A tradição dos comentadores da antiguidade relacionou a quadratura de Hipócrates às lúnulas, o que vimos que pode não ser sustentado, também por as lúnulas serem um estudo independente da quadratura do círculo. Da mesma forma, pode haver graves incoerências nas análises das demais passagens sobre as quadraturas pelos comentadores, as quais teriam impactado nas interpretações posteriores, tanto de outros comentadores do período e de tempos recentes.

Diante dessas considerações preliminares, avançaremos agora para abordar especificamente nossas interpretações sobre os processos de quadratura de Antifonte e Brison.

## *Antifonte*

Simplício afirma que Antifonte alcançaria seu resultado *em algum momento*. Isto poderia indicar tanto que o processo seria obtido em finitos passos quanto em um tempo finito. A primeira opção seria um

[10] “[...] οἷον τὸ Ἱπποκράτους ἢ ὁ τετραγωνισμὸς ὁ διὰ τῶν μηνίσκων (Aristóteles, Ref. Soph. 171b, 15-16).

erro desastroso, como aponta Knorr (1982). A segunda opção não seria possível dentro da visão aristotélica de infinito. Simplício mostra compartilhar da visão de infinito de Aristóteles e não aceita a solução de Antifonte como algo a ser alcançado dentro de um tempo finito, tal qual o paradoxo de Aquiles e a tartaruga apresentado por Zenão.

Nossas leituras apontam que Antifonte propôs que o círculo seria o limite de um polígono inscrito a ele cujo número de lados cresce indefinitivamente. O problema de Antifonte ilustra a questão envolvendo *imagem* e *conceito*, como a discussão atribuída a Protágoras sobre uma tangente tocar um ou vários pontos de uma circunferência (*Metaph.* III.2, 997b32-998a4). O conceito de aproximação é o que acontece quando a exatidão não é possível de obter.

O relato de Eutócio nos permite pensar que Antifonte convergiria ao formato traçado de uma aproximação e/ou exaustão, algo feito por Arquimedes na *Medida do círculo*. Nesta obra, Arquimedes não realiza a quadratura do círculo, pela impossibilidade de se conseguir construir uma reta igual a circunferência. Da mesma forma, Antifonte não consegue fazer coincidir o polígono com o círculo.

Um método aproximativo baseado na ideia de exaustão da área do polígono, que nos remete método de Exaustão atribuído a Eudoxo, nos faz indagar se Aristóteles teve contato com essa teoria. Oferecendo uma finalização mais clara ao processo infinito, talvez mudasse a análise do estagirita frente ao problema e também a outras visões sobre o infinito.

Sabemos que Aristóteles teve contato com os estudos de Eudoxo citando, por exemplo, o sistema das esferas concêntricas na *Metafísica* (XIII.8, 1073b, 17-32). Mas não há menção sobre estudos de exaustão, nem mesmo outros estudos atribuídos a figura de Eudoxo, como sobre o volume da pirâmide e do cone, que são atribuídos primeiro a Demócrito por Arquimedes, mas que Eudoxo teria sido o primeiro a *demonstrar*.

Uma primeira leitura que fazemos sobre essa ausência é que Eudoxo já não se encontrava mais em Atenas quando desenvolveu esses estudos, tendo falecido em sua terra natal, Cnido. Assim, Aristóteles não teve acesso a esses estudos, justificando a ausência destes em sua obra e em suas discussões.

Outra leitura que podemos fazer é que trabalhos sobre temas não originais não teriam uma recepção tão ampla ao público geral quanto ao matemático. Os resultados *omitidos* de Eudoxo, de alguma forma, possuem peculiaridades envolvendo contínuo e infinito, que trazem consequências para as discussões sobre métodos e conceitos. Aristóteles em posse *do Método de exaustão* talvez fizesse uma outra crítica à solução de Antifonte.

É possível que autores atribuam o método de Exaustão a Eudoxo devido a sua reputação e pela tradição oral, sendo que Eudoxo teria *formalizado* em parte o resultado, da mesma forma que teria feito com o volume do cone e da pirâmide.

Nossa interpretação é de que o processo de Antifonte seria algo voltado a uma aproximação da área do círculo, com uma visão de que o círculo seria o limite de um polígono com lados aumentando de forma indefinida, mas sem uma preocupação em de fato oferecer um quadrado com mesma área que o círculo. Atribuímos um processo semelhante para Hipócrates, pois Eutócio, ao relacioná-los juntos, estabelece que os processos possuem semelhanças entre si e com os estudos de Arquimedes sobre a medida do círculo.

Essa quadratura por segmento, segundo Aristóteles, é uma quadratura que descreve um processo infinito, e que seria um resultado errado, no seu ponto de vista matemático. Ele nega o caráter matemático da demonstração de Antifonte.

O método aproximativo, algo muito próximo a ideia da exaustão, deve ter sido uma prática comum nos meados do século V AEC, conforme mostra essa tradição que podemos relacionar Antifonte e Hipócrates, pelo testemunho de Eutócio, e também Demócrito, pelo testemunho de Arquimedes.

Ao relacionar o trabalho de Antifonte com a quadratura proposta por Arquimedes em seus comentários sobre *A medida do círculo*, Eutócio evidencia uma recepção positiva de seu método no meio matemático, e que se manteve dentro de uma tradição, apesar das refutações e críticas aristotélicas.

## *Brison*

Os comentadores de Aristóteles tecem suas críticas a Brison partindo do pressuposto de que se chegou a um resultado, ou seja, quadrou-se o círculo. No entanto, queremos discutir justamente a visão de que Brison não busca traçar uma quadratura do círculo, mas se volta a discutir a existência de um quadrado equivalente a um círculo, como Proclo traria em seu relato.

O testemunho de Eutócio, relacionando Antifonte e Hipócrates a processos aproximativos de Arquimedes para o círculo, implicitamente expulsa a interpretação de que Brison seria um refinamento do processo de Antifonte. Se Brison tivesse feito esse refinamento, circunscrevendo e inscrevendo um polígono ao círculo e aumentado indiscriminadamente seus lados, estaria mais próximo ainda a Arquimedes, e nada justificaria a omissão de seu nome no comentário de Eutócio. Isso nos leva a concluir que Brison tomou um outro caminho, não propondo um processo aproximativo para a quadratura do círculo.

Pelo argumento do contínuo, entre um quadrado maior circunscrito e outro menor inscrito, existem todos os quadrados intermediários entre estes. Assim, ao termos um quadrado estritamente maior que o círculo e outro estritamente menor, este argumento mostra que existe um quadrado intermediário que corresponde exatamente a quadratura do círculo. E Brison se limitaria a essa discussão de existência, não buscando oferecer uma forma de obter esse quadrado intermediário. Isso é exatamente o princípio defendido por Proclo e Temístio para Brison.

Proclo discute que esse princípio seria falso no momento em que

Brison estaria tentando relacionar o retilíneo e o curvilíneo, princípio refutado por Aristóteles (*Física*, VII.4, 248b, 4-6). Mas a compressão feita por Brison, através do argumento do contínuo, faz com que a existência do quadrado saia quase que naturalmente, sem se debruçar numa perspectiva alongada sobre a comparação entre o arco e a reta.

Esse processo ser inválido, ou seja, refutar esse raciocínio de Brison, significa que entre magnitudes não haverá todas as magnitudes, ou seja, há *buracos*, abandonando a ideia da continuidade e complicando diversos outros processos, como o princípio que uma reta pode ser dividida ao infinito. Aristóteles ao aparentar não ver isso, e assim contradizer diversos resultados, aponta que Brison possui uma função de lógica na obra, não matemática, já que a configuração proposta por Brison encaixa na definição de Aristóteles.

Essa interpretação que propomos de Brison sugere que os geômetras gregos já estariam familiarizados com questões envolvendo o contínuo, em especial a questão que entre duas magnitudes existem todas as demais intermediárias, se aproximando do enunciado contemporâneo do Teorema do Valor Intermediário, provado em 1817 por Bernard Bolzano.[11]

Arquimedes relaciona o círculo a um triângulo cujos catetos mediriam o equivalente ao raio e outro a medida circunferência. Isso mostra como essa relação não era um problema teórico, mas prático por não se conseguir uma reta igual ao perímetro do círculo. Se discute o como e aproximações para isso, mas não a existência.

## *Conclusão*

Lloyd (1987) considera Antifonte um matemático, afirmando que Eutócio o menciona com tal, juntamente com Hipócrates. No entanto,

[11] "[...] a function fx varies according to the law of continuity for all values of x inside or outside certains limits [...]" (Russ, 1980).

ele observa que mesmo o testemunho de Eutócio é bastante vago e não oferece muitos detalhes sobre Antifonte (Lloyd, 1987, p. 110).

Isso nos leva a questionar o que significaria ser um matemático no contexto do século V AEC, a fim de entender como classificar Antifonte e Brison e traçar uma possível relação entre eles e estudiosos posteriores.

Knorr (1982) sugere uma noção do que poderia ser um matemático especialista na Grécia dos séculos V e IV AEC, utilizando como parâmetro o Catálogo dos Geômetras de Eudemo: um geômetra é aquele mencionado neste catálogo. Por outro lado, Vitrac (2001) defende que um matemático especialista estaria envolvido em três atividades principais: i) produção literária; ii) ensino; e iii) pesquisa.

A produção literária de Antifonte e Brison estaria refletida nos escritos de Aristóteles. Seus papéis no ensino seriam evidentes na maneira alusiva como o estagirita se refere a seus métodos, sugerindo que eles tinham suas descobertas amplamente disseminadas. Por fim, a pesquisa em matemática estaria também atrelada à produção literária de Antifonte e Brison.

Antifonte e Brison poderiam ser considerados matemáticos com base nos parâmetros propostos por Vitrac (2001), embora a falta de evidências sólidas nos impeça de afirmar isso com total confiança. No entanto, mesmo que não sejam classificados como matemáticos, são testemunhas de práticas geométricas, em particular daquelas do século V AEC. Essas práticas eram amplamente difundidas nos círculos intelectuais, a ponto de, no século IV AEC, uma simples menção alusiva a seus métodos ser suficiente para Aristóteles.

Papo de Alexandria não menciona Antifonte e Brison, o que não invalida seus resultados, pois ele também não faz referência a Hipócrates. O que parece ter ocorrido é que, no âmbito matemático, os estudos avançaram e resultados foram superados, tornando essa discussão desinteressante, uma vez que já estava estabelecida.

Embora Aristóteles e Platão tenham excluído os processos envolvendo o movimento da matemática, essa exclusão não se sustenta nas tradições matemáticas posteriores, como vemos pelo uso de curvas superiores nos mais diversos estudos de geometria, como a espiral de Arquimedes.

Considerarmos resultados e práticas matemáticas através de um meio que apenas temos acesso por Aristóteles, Platão, e demais filósofos, introduz um viés, não nos permitindo uma visão de práticas matemáticas da época.

É importante ressaltar que nossa compreensão desses resultados e práticas matemáticas é limitada pelas fontes disponíveis. O período pré-euclidiano, especialmente o do século V AEC, é de difícil análise devido à escassez de fontes e fragmentos, o que nos leva a adotar uma abordagem semelhante à de Knorr (1982, p.113), reconhecendo que nossa argumentação não pode ser definitivamente confirmada com base nas evidências documentais disponíveis atualmente.

## *Referências Bibliográficas*


ALEXANDRE DE AFRODÍSIAS – *Commentaria in Aristotelem Graeca* – Edita consilio et auctoritate. Academiae litterarum regiae borussicae. Ed.: Maximilianus Wallies. Berolini. Prússia: Georgii Reimeri. 1898.

ANTIFONTE; ANDOCIDES – *Minor Attic Orators, Volume I: Antiphon. Andocides*. Traduzido por: K. J. Maidment. Loeb Classical Library 308. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1941.

ARISTÓFANES – *Birds. Lysistrata. Women at the Thesmophoria*. Jeffrey Henderson (ed./trad.). Loeb Classical Library 179. Cambridge, MA: Harvard University Press, 2000.

ARISTÓTELES – *Aristotelis Opera*. Bekker, A. I. (org.). Academia Regia Borussica. 1831.

ARQUIMEDES – *Des Corps Flottants. Stomachion. La Méthode. Le Livre des Lemmes. Le Problème des Boeufs.* Trad.: Charles Mugler. Paris: Les Belles Lettres. 1971.

_________. *Commentaire d'Eutocius: Fragments*. Trad.: Charles Mugler. Paris: Les Belles Lettres. 1972.

CORNFORD, F. M. – *Principium Sapientiæ: The origins of Greek philosophical thought.* Cambridge: Cambridge University Press. 1952.

DOBIAS-LALOU, C. – *Inscriptions of Greek Cyrenaica* in collaboration with Alice Bencivenni, Hugues Berthelot, with help from Simona Antolini, Silvia Maria Marengo, and Emilio Rosamilia; Dobias-Lalou, Catherine. *Greek Verse Inscriptions of Cyrenaica* in collaboration with Alice Bencivenni, with help from Joyce M. Reynolds and Charlotte Roueché. Bologna: CRR-MM, Alma Mater Studiorum Università di Bologna, 2017. ISBN 9788898010684, http://doi.org/10.6092/UNIBO/IGCYRGVCYR. Acesso em: jan. 2023.

DIELS, H.; KRANZ, W. – *Die Fragmente der Vorsokratiker*. Berlim: Wiedmannsche, 1960 [1903].

EUCLIDES – *Os Elementos*. Tradução de I. Bicudo, editora da Unesp.

FILOPONO, J. – *On Aristotle Physics. 1.1–3.* Trad.: Catherine Osborne. Londres: Bloomsbury. 2006.

________. *On Aristotle Posterior Analytics. 1.9–18*. Trad.: Richard McKirahan. Londres: Boomsbury. 2012.

GILLISPIE, C. C. (ed.) – *Dictionary of Scientific Biography. Vol. 7.* New York: Simon & Schuster Macmillan. 1980.

HEATH, T. L. – *A History of Greek Mathematics. Vol. 1*. Nova Iorque, NY:

Dover Publications, Inc., 2018 [1921].

_________. Mathematics in Aristotle. Oxford: University Press, 1970 [1949].

HØYRUP, J. – Hippocrates of Chios – His Elements and His Lunes. A critique of circular reasoning. AIMS Mathematics, v.5, p.158-184. 2019

KNORR, W. R. – Infinity and continuity: The interaction of Mathematics and Philosophy in Antiquity, In: N. Kretzmann (eds.), *Infinity and Continuity in Ancient and Medieval Thought*, p. 112-145, Ithaca, NY: Cornell University Press. 1982.

_________. Construction as existence proof in Ancient Geometry. Ancient Philosophy, 3, p. 125-148. 1983.

_________. *The ancient tradition of geometric problems*. Nova York: Dover Publications, Inc. 1986.

LLOYD, G. – The alleged fallacy of Hippocrates of Chios. Apeiron: A journal for Ancient Philosophy and Science. Vol. 20, n.2, p. 103-128. 1987.

MUELLER, I. – Aristotle and the quadrature of the circle, In: N. Kretzmann (eds.) *Infinity and Continuity in Ancient and Medieval Thought*, p. 146-164, Ithaca, NY: Cornell University Press. 1982.

PASKALEVA, B. – Squaring the circle and the origins of learned ignorance. Archiv für mittelalterliche Philosophie und Kultur, vol. 25, 2019, pp. 181-236.

PLATÃO – *Laches. Protagoras. Meno. Euthydemus*. Trad.: W. R. M. Lamb. Loeb Classical Library 165. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1924.

POSTE, E. – *Aristotle on Fallacies: or the Sophistici Elenchi.* Londres: Macmillan and co., 1866.

ROBERTSON, N. – Religion and reconciliation in Greek cities: The sacred laws of Selinus and Cyrene. American Classical Studies, vol. 54. Oxford: Oxford University Press. 2010.

RUSS, S. B. – A translation of Bolzano's paper on the intermediate value theorem. Historia Mathematica, vol.7, Issue 2, p. 156-185, 1980.

SIMPLÍCIO – *On Aristotle Physics. 1.1 – 2.* Trad.: Stephen Menn. Londres: Bloomsbury. 2022.

TANNERY, P. – *Mémoires Scientifiques: vol. I. Sciences exactes dans l'antiquité.* Paris: Gauthier-Villars. 1912.

TEMÍSTIO – On Aristotle Physics. 1 – 3. Trad.: Robert B. Todd. Londres: Bloomsbury. 2012.

THOMAS, I. (Tradutor.) – *Greek Mathematical Works. Vol.1.* Loeb Classical Library 335. Londres: William Heinemann Ltd., 1939.

VITRAC, B. – L'interprétation mathématique du dilemme du cône (DK 68 B 155). Démocrite était-il mathématicien? Cahier Philosophiques de Strasbourg, Université de Strasbourg, 2001, v. 12, p. 89-129.

WASSERSTEIN, A. – Some Early Greek Attempts to Square the Circle. Phronesis, v. 4, n. 2, p. 92-100. 1959.

ZEUTHEN, H. G. – Die geometrische Konstruktion als "Existenzbeweis" in der antiken Geometrie. Mathematische Annalen. v. 47, p.222-228. 1896.