



**Separação Entre Geoide e Quase-Geoide: Análise das  
Diferenças Entre as Altitudes Normal-Ortométrica e Ortométrica Rigorosa**  
Separation Between Geoid and Quasi-Geoid: Analysis of the  
Differences Between Normal-Orthometric and Rigorous Orthometric Heights

Fabio Luiz Albarici<sup>1</sup>; Gabriel Nascimento Guimarães<sup>2</sup>;  
Ismael Foroughi<sup>3</sup>; Marcelo Santos<sup>3</sup> & Jorge Luiz Alves Trabanco<sup>4</sup>

<sup>1</sup>IFSULDEMINAS – Campus Inconfidentes, Praça Tiradentes, 416 – Centro, 37576-000, Inconfidentes/MG, Brasil

<sup>2</sup>Universidade Federal de Uberlândia - Campus Monte Carmelo, Rua Goiás, 2000 - Vila Nova, 38500-000, Monte Carmelo/MG, Brasil

<sup>3</sup>University of New Brunswick - Department of Geodesy and Geomatics Engineering., P.O. Box 4400, Fredericton/NB, Canada.

<sup>4</sup>UNICAMP, Faculdade de Engenharia Civil. Rua Saturnino de Brito, 224

Cidade Universitária “Zeferino Vaz” - Distrito Barão Geraldo - Caixa Postal 6021, 13083-852, Campinas/SP, Brasil

E-mails: [fabio.albarici@ifsuldeminas.edu.br](mailto:fabio.albarici@ifsuldeminas.edu.br); [gabriel@ufu.br](mailto:gabriel@ufu.br); [i.foroughi@unb.ca](mailto:i.foroughi@unb.ca); [msantos@unb.ca](mailto:msantos@unb.ca); [trabanco@fec.unicamp.br](mailto:trabanco@fec.unicamp.br)

Recebido em: 27/04/2018 Aprovado em: 23/09/2018

DOI: [http://dx.doi.org/10.11137/2018\\_3\\_71\\_81](http://dx.doi.org/10.11137/2018_3_71_81)

## Resumo

As altitudes ortométricas e normais são os dois sistemas de altitude mais utilizados na realização prática dos *data* geodésicos verticais locais e nacionais. A diferença principal entre estes dois conceitos é que a gravidade média real ao longo da linha de prumo entre o geoide e a superfície topográfica, define teoricamente a altitude ortométrica, já a gravidade média normal ao longo da linha de prumo entre o elipsoide de referência e o teluróide é usada na definição da altitude normal. No sistema geodésico brasileiro, apenas uma correção de não paralelismo é aplicada, tendo-se a altitude normal-ortométrica. O objetivo deste trabalho é calcular a separação entre geoide e quase-geoide obtidos através dos sistemas de altitudes: normal-ortométrica e ortométrica rigorosa. Através de testes numéricos, viu-se que a separação é maior quando se utiliza o sistema brasileiro com valores entre -0,5 e 0,5 metros. Em contrapartida, utilizando-se a nova altitude rigorosa, onde se avalia a gravidade média a longo do fio de prumo levando-se em consideração as variações de densidades topográficas e de massas acima do geoide, os valores são menores, ficando no intervalo de -0,05 a 0,2 metros. Pode-se dizer que, o sistema de altitude ortométrica rigorosa é mais acurado, pois possuir a menor diferença entre a separação geoide/quase-geoide.

**Palavras-chave:** Geoide; Quase-geoide; Altitude Ortométrica Rigorosa; Altitude Normal

## Abstract

The orthometric and normal heights are the two altitude systems most used in the practical realization of the local and national vertical geodesic *data*. The main difference between these two concepts is that the actual mean gravity along the plumb line between the geoid and the topographic surface theoretically defines the orthometric heights, as well as the normal mean gravity along the plumb line between the reference ellipsoid and teluroid is used in the definition of normal heights. In the Brazilian geodetic system, only a correction of non-parallelism is applied, resulting in the normal-orthometric heights. The objective of this work is to calculate the separation between geoid and quasi-geoid obtained through the systems of normal-orthometric and rigorous orthometric heights. By means of numerical tests, it was observed that the separation is greater when using the brazilian system with values between -0.5 and 0.5 meters. On the other hand, by using the new rigorous heights, the average gravity along the long plumb line is evaluated, taking into account the variations of topographic densities and masses above the geoid, the values are smaller, being in the range of -0.05 to 0.2 meters. It can be said that the rigorous orthometric heights system is more accurate, since it has the smallest difference between the geoid/quasi-geoid separation.

**Keywords:** Geoid; Quasi-geoid; Rigorous Orthometric Heights; Normal Heights

## 1 Introdução

Uma questão amplamente discutida entre os geodestas é qual altitude científica é mais apropriada: Normal ou Ortométrica. No que tange ao referencial geodésico vertical, o emprego da componente altimétrica consistente e integrado é de suma importância também em operações do dia-a-dia, tais como: construções e monitoramentos de barragens, estradas, linhas férreas, transposição de rios. Quando se trabalha com movimentação de fluídos, sendo a água o exemplo mais utilizado, deve-se levar em conta altitudes que consideram o campo de gravidade da Terra e, conseqüentemente possuem significado físico e não matemático (como a altitude derivada de receptores GNSS – *Global Navigation Satellite System*). A Associação Internacional de Geodésia (IAG – *International Association of Geodesy*), por meio da Resolução nº 1 de 2015 ([https://iag.dgfi.tum.de/fileadmin/IAG-docs/IAG\\_Resolutions\\_2015.pdf](https://iag.dgfi.tum.de/fileadmin/IAG-docs/IAG_Resolutions_2015.pdf)) estabelece o uso do geopotencial ( $W_0$ ) no geoide, como referência vertical, uma vez que é uma grande física.

As organizações oficiais de cada país na América do Sul escolhem a melhor solução em altitude que atenda às necessidades. Porém, o problema sempre discutido é quando se necessita de uma integração destes sistemas em países contíguos. Sempre há uma enorme disparidade, quando os países utilizam sistemas de altitudes diferentes. A maioria dos países no mundo utiliza-se das altitudes normal ou ortométrica. Uma comparação conceitual sobre estes dois sistemas de altitudes pode ser encontrada em Vaníček *et al.* (2003). Tenzer *et al.* (2005) introduziram uma nova metodologia para melhorar o sistema de altitude ortométrica, chamado de altitude ortométrica rigorosa. O principal problema da definição rigorosa da altitude ortométrica é a avaliação do valor médio da aceleração da gravidade no interior da Terra ao longo da linha de prumo. Para encontrar a relação exata entre as altitudes ortométricas rigorosas e as altitudes normais de Molodensky, a gravidade média é decomposta em: gravidade normal média, os valores médios da gravidade gerada pelas massas topográficas e atmosféricas e a perturbação da gravidade média gerada pelas massas contidas no geoide. A gravidade normal média é avaliada de acordo com a

teoria de *Somigliana-Pizzetti* do campo de gravidade normal gerada pelo elipsoide de revolução. Usando a fórmula de *Bruns*, os valores médios de gravidade ao longo da linha de prumo gerados pelas massas topográficas e atmosféricas podem ser calculados como a média integral entre a superfície da Terra e o geoide. Como o potencial gravitacional perturbador gerado pelas massas no interior do geoide é harmônico acima do geoide, o valor médio da perturbação gravitacional gerada pelo geoide é definido pela aplicação da equação integral de *Poisson* (Tenzer *et al.*, 2005). Kingdon *et al.* (2005), Santos *et al.* (2006) e Foroughi, *et al.* (2017), apresentam uma revisão matemática do método. Neste artigo apenas as equações essenciais serão apresentadas nas seções posteriores.

Pretende-se avaliar neste artigo a separação entre o geoide e o quase-geoide, utilizando uma linha de nivelamento entre o litoral e o interior do estado de São Paulo. Para alcançar este objetivo, calculou-se as altitudes normal e ortométrica rigorosa, e avaliou-se a diferença com as altitudes normal-ortométrica do Sistema Geodésico Brasileiro (SGB), uma vez que o entendimento da separação entre o geoide e o quase-geoide é importante no contexto da modernização do sistema altimétrico brasileiro. Esta separação reflete a diferença entre as altitudes do tipo ortométricas das normais. Independente de qual o sistema de altitudes adotado pelos países contíguos pode-se efetivar a conversão das altitudes entre estes sistemas com modelagem adequada (Ferreira *et al.*, 2011).

## 2 Revisão da Teoria

A separação das superfícies de referência para as altitudes normal e ortométrica é, caracteristicamente, de poucos decímetros podendo atingir, segundo Foroughi & Tenzer (2017), aproximadamente -4 m na região do Himalaia. Esta separação é de grande importância para realização de sistemas de altitudes, tanto nacional quanto internacional, sendo a maior contribuição para esta separação a densidade de massas topográficas. Segundo Flury & Rummel (2009), o tratamento rigoroso para as massas topográficas, faz com que a separação geoide/quase-geoide seja pequena, da ordem de 30 cm no topo dos Alpes. Sabe-se que a altura geoidal (N) e

a quase-geoidal ( $\zeta$ ) (ou anomalia de altura), podem ser comparadas através da diferença entre as altitudes ortométrica ( $H^o$ ) e elipsoidal ( $h$ ) obtidas a partir de observações GNSS. As alturas geoidais e quase-geoidais são calculadas a partir de observações gravimétricas. As altitudes normal ( $H^N$ ) e ortométricas ( $H^o$ ), por sua vez, são calculadas a partir de GNSS/nivelamento. O sistema clássico (devido a Stokes), utiliza-se das alturas geoidais e da altitude ortométrica (equação 1), enquanto que a concepção moderna (devido a Molodensky), utiliza-se da altura quase-geoidal e a altitude normal (equação 2) (Heiskanen & Moritz, 1967; Foroughi *et al.*, 2017).

$$N = h - H^o \quad (1)$$

$$\zeta = h - H^N \quad (2)$$

Ao se manipular as equações 1 e 2, pode-se obter a diferença entre as altitudes normal e ortométrica (equação 3). A partir da diferença entre as altitudes pode-se avaliar a separação entre as alturas geoidais e quase-geoidais:

$$N - \zeta = H^o - H^N \quad (3)$$

Os sistemas altimétricos requerem o estabelecimento de uma definição unívoca e com significado físico. Nesse âmbito os sistemas de altitudes físicas devem ser baseados em números geopotenciais ( $C$ ). Este valor físico é calculado pela diferença de potencial entre a superfície de referência da Terra real, o geóide ( $W_0$ ), e de um ponto de interesse ( $W_p$ ), em função da gravidade ( $g$ ) entre o geóide e a superfície topográfica (Kingdon *et al.*, 2005; Sánchez, 2013; Severo *et al.*, 2013). Quando são realizadas as medidas de gravidade conjuntamente com o nivelamento, tem-se de forma aproximada (Freitas & Blitzkow, 1999):

$$W_0 - W_p = C \cong \sum_A^B g \delta_n \quad (4)$$

A partir das diferenças de potencial, calcula-se o número do geopotencial, que possui significado físico, porém seus valores são de difícil interpretação e entendimento. Dessa forma, deve-se transformar os valores de potencial em medidas de altitudes. Isso requer que os números do geopotencial sejam divididos por valores de gravidade específicos, o que

definirá o tipo de altitude a ser utilizada. Os tipos de altitudes calculadas neste trabalho são: as altitudes normal, ortométrica e a altitude ortométrica rigorosa. Matematicamente a altitude ortométrica ( $H^o$ ) é definida pelo número do geopotencial ( $C$ ) dividido pela gravidade média (entre o ponto de interesse e o geóide) (Kingdon *et al.*, 2005).

$$H^o = \frac{C}{g_m} \quad (5)$$

Onde

$$g_m = \frac{1}{H^o} \int_{P_0}^P g dH \quad (6)$$

Já a altitude normal é uma abordagem para altitudes ortométricas, descrevendo as altitudes em uma superfície fictícia, o quase-geóide. A altitude normal ( $H^N$ ) requer a utilização de uma quantidade conhecida como anomalia de altura (Vanicek *et al.*, 2003). Supõe-se que a altitude elipsoidal da topografia acima do elipsoide de referência definida por  $h$  e o número geopotencial ( $C$ ) são dados. A altitude normal de Molodensky pode ser determinada a partir da equação 7 (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2006):

$$H^N = \frac{C}{\gamma} \left[ 1 + (1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi) \frac{C}{a\gamma} + \left( \frac{C}{a\gamma} \right)^2 \right] \quad (7)$$

Onde  $\gamma$  é gravidade normal e  $\varphi$  é a latitude.

Foroughi *et al.* (2017) mostraram que a altitude ortométrica rigorosa pode ser definida usando conjuntos de dados livremente disponíveis e com alta precisão (por exemplo, utilizando-se o banco de dados geodésicos do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), onde se encontram dados para latitude, longitude, nivelamento, gravidade, altitudes elipsoidal e ortométrica das RRNN (Rede de Referências de Nível). As correções de conversão das altitudes ortométricas de Helmert em altitudes ortométricas rigorosas são verificadas em Tenzer *et al.* (2005), Santos *et al.* (2006) e Foroughi *et al.* (2017). Para o cálculo da altitude ortométrica rigorosa há necessidade de aplicar-se algumas correções, cuja dificuldade está no cálculo da gravidade média. Utiliza-se duas equações para o cálculo da gravidade: *Poincaré-Prey* (aproximada de Helmert) (equação 8) e a gravidade mais rigorosa (equação 9). A

diferença resultante é chamada de correção para o valor médio de Helmert ( $\varepsilon_{\bar{g}}(\Omega)$ ), conforme a equação 10:

Onde:  $G$  é a constante gravitacional de Newton,  $\rho_0$  é a densidade de massas topográficas com valor de  $\rho_0 = 2670 \text{ kg/m}^3$ ,  $\bar{g}(\Omega)$  é a gravidade média em um ponto arbitrário ao longo da linha de prumo,  $g^{\text{NT}}(r, \Omega)$  é a gravidade gerada por massas contidas no geoide, isto é, com a topografia removida,  $g^{\text{T}}(r, \Omega)$  é a gravidade gerada por massas contidas apenas na topografia, isto é, entre o geoide e a superfície da Terra,  $g^{\delta\rho}(r, \Omega)$  é o efeito na gravidade devido a variações da densidade-massa lateral dentro da topografia,  $\gamma(r, \Omega)$  é a gravidade normal gerada pelo elipsoide de referência geocêntrico,  $\delta g^{\text{NT}}(r, \Omega)$  é o distúrbio da gravidade gerados por massas contidas no geoide,  $g_{\text{B}}^{\text{T}}(r, \Omega)$  é a gravidade gerada pela esfera Bouguer Shell,  $g_{\text{R}}^{\text{T}}(r, \Omega)$  é a gravidade gerada pela rugosidade do terreno,  $\varepsilon_{\bar{g}}(\Omega)$  é a correção da gravidade para a aproximação de Helmert da média integral ao longo da linha de prumo,  $\varepsilon_{\text{H}}^{\circ}(\Omega)$  é a correção da altitude ortométrica de Helmert para convertê-la para a altitude ortométrica rigorosa.

Na equação 10, na parte direita da igualdade tem-se: no primeiro termo a correção para a segun-

da ordem para a gravidade normal ( $\varepsilon_{\text{H}}^{\text{Y}}$ ), o segundo termo os efeitos de Bouguer Shell ( $\varepsilon_{\text{H}}^{\text{B}}$ ), o terceiro, quarto e quinto termos tem-se, respectivamente, a correção da não-topografia ( $\varepsilon_{\text{H}}^{\text{NT}}$ ), a correção do terreno/rugosidade ( $\varepsilon_{\text{H}}^{\text{R}}$ ) e a correção lateral de densidade topográfica variável ( $\varepsilon_{\text{H}}^{\delta\rho}$ ). Assim, converte-se as altitudes ortométricas de Helmert na altitude ortométrica rigorosa através da equação 11 (Santos *et al.*, 2006; Foroughi *et al.*, 2017). A Figura 1 ilustra as componentes das correções aplicadas.

### 3 Metodologia

#### 3.1 Área de Estudo

Este experimento foi realizado em uma linha de nivelamento situada no estado de São Paulo, que tem início na cidade de Caraguatubá, passando pelas cidades de Paraibuna, São José dos Campos, Nazaré Paulista, Atibaia, Campinas, Limeira, Leme, Araraquara, Sertãozinho e chegando em Ribeirão Preto. Como nem todas as RRNN estão disponíveis, assim utilizou-se as linhas de nivelamento possíveis e com maior número de estações entre as cidades ci-

$$\bar{g}^{\text{H}}(\Omega) = \gamma(r_{\text{t}}, \Omega) + \delta g_{\text{g}}^{\text{NT}}(r_{\text{t}}, \Omega) + g_{\text{B}}^{\text{T}}(r_{\text{t}}, \Omega) + g_{\text{R}}^{\text{T}}(r_{\text{t}}, \Omega) + g^{\delta\rho}(r_{\text{t}}, \Omega) - 1/2 \left( \frac{\delta\gamma}{\delta h} + 4\pi G\rho_0 \right) H^{\circ}(\Omega) \quad (8)$$

$$\bar{g}(\Omega) \approx \bar{\gamma}(\Omega) + \overline{\delta g^{\text{NT}}}(\Omega) + \bar{g}_{\text{B}}^{\text{T}}(\Omega) + \bar{g}_{\text{R}}^{\text{T}}(\Omega) + \bar{g}^{\delta\rho}(\Omega) \quad (9)$$

$$\varepsilon_{\bar{g}}(\Omega) = \bar{g}(\Omega) - \bar{g}^{\text{H}}(\Omega) = \left[ \bar{\gamma}(\Omega) - \gamma(r_{\text{t}}, \Omega) + 1/2 \frac{\delta\gamma}{\delta h} H^{\circ}(\Omega) \right] + \left[ \bar{g}_{\text{B}}^{\text{T}}(\Omega) - g_{\text{B}}^{\text{T}}(r_{\text{t}}, \Omega) + 2\pi G\rho_0 H^{\circ}(\Omega) \right] + \left[ \overline{\delta g^{\text{NT}}}(\Omega) - \delta g_{\text{g}}^{\text{NT}}(r_{\text{t}}, \Omega) \right] + \left[ \bar{g}_{\text{R}}^{\text{T}}(\Omega) - g_{\text{R}}^{\text{T}}(r_{\text{t}}, \Omega) \right] + \left[ \bar{g}^{\delta\rho}(\Omega) - g^{\delta\rho}(r_{\text{t}}, \Omega) \right] \quad (10)$$

$$\varepsilon_{\text{H}}^{\circ} = -\frac{H^{\circ}(\Omega)}{\bar{g}(\Omega)} (\varepsilon_{\text{H}}^{\text{Y}} + \varepsilon_{\text{H}}^{\text{B}} + \varepsilon_{\text{H}}^{\text{NT}} + \varepsilon_{\text{H}}^{\text{R}} + \varepsilon_{\text{H}}^{\delta\rho}) \quad (11)$$

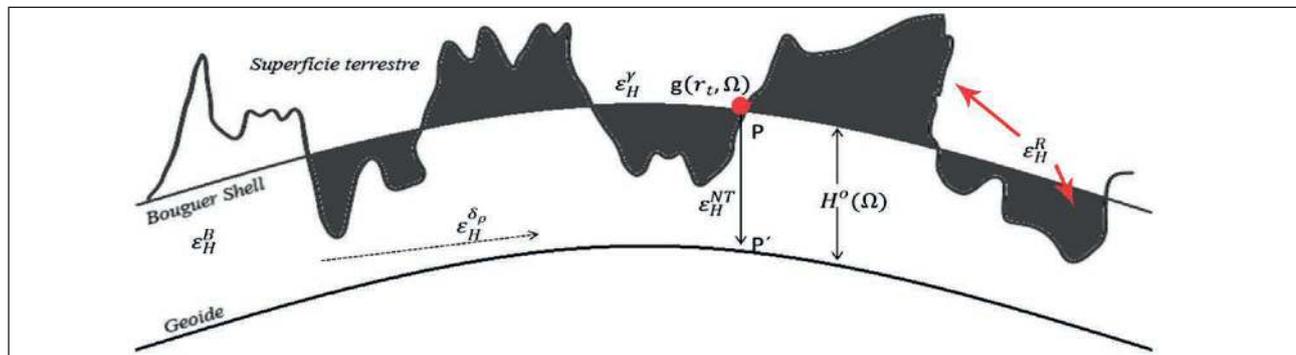


Figura 1 Componentes das correções para altitude rigorosa (Fonte: Adaptado de Kingdon *et al.*, 2009).

tadas. Esse trajeto tem uma extensão de 460 km, ente a RRNN 1980U (Caraguatatuba) até a RRNN 42M (Ribeirão Preto), com desnível máximo de 804,343 metros. A Figura 2 mostra a localização das RRNN e a área de estudos.

Como o objetivo é avaliar a separação entre geoide/quase-geoide através de dois sistemas de altitudes, a Normal-Ortométrica e a Ortométrica Rigorosa, é necessário realizar o cálculo das altitudes normal e de Helmert, para se aplicar as correções necessárias na obtenção da altitude ortométrica rigorosa. Para o cálculo das altitudes normal, ortométrica de Helmert e a denominada ortométrica rigorosa, utilizou-se os seguintes dados: latitude, longitude, altitude elipsoidal derivada de observações GNSS, desníveis observados sem a correção dos erros sistemáticos, que compõem a linhas de nivelamento da RAAP (Rede Altimétrica e Alta Precisão), obtidos juntamente com o IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), e os valores de gravidade sobre as RRNN (Rede de Referências de Nível) no IAG/USP (Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo), além de um modelo de densidade de massas topográficas. Calculou-se primeiramente o número do geopotencial (equação 4) para todas as RRNN, e a partir desses valores obteve-se as altitudes normal e ortométrica de Helmert (equações 5 e 7). Dessa forma, foram obtidas até o momento as altitudes Normal, Ortométrica de Helmert e a Normal-Orto-

métrica, sendo que esta última compõem a rede de nivelamento ajustada e corrigida de termo aplicado aos desníveis observados, o qual atenua o erro causado pelo não paralelismo das superfícies equipotenciais, manifestado pela falta de dados gravimétricos disponíveis (Pina *et al.*, 2006).

A última altitude a ser calculada é a ortométrica rigorosa, onde se aplicam as correções antes negligenciadas. Os termos de cada correção contidos na equação 10 foram calculados, e utilizou-se a equação 11 para obter a correção total. Os conjuntos de dados descritos acima foram utilizados para calcular a separação geoide e quase-geoide na área de estudo, através do método clássico (equação 3). Como forma de validar os resultados desse método, foram comparados com os resultados obtidos por dois modelos globais, o EIGEN-6C4 (*European Improved Gravity Model the Earth by New Techniques*) e GECO (*Combining GOCE data and EGM2008*). Maiores detalhes destes modelos ver Förste *et al.* (2015) e Gilardoni *et al.* (2016). Estes dois modelos realizam o cálculo do geoide (N) e anomalia de altura ( $\zeta$ ) e são disponibilizados pelo ICGEM (*International Centre for Global Earth Models*) através do sítio <http://icgem.gfz-potsdam.de/calc>. Para calcular os valores dos modelos do geoide e anomalia de altura, utilizou-se os seguintes parâmetros: sistema de referência GRS80, correção livre de maré (*tide free*), e os termos para os harmônicos esféricos com grau e ordem de 2190.

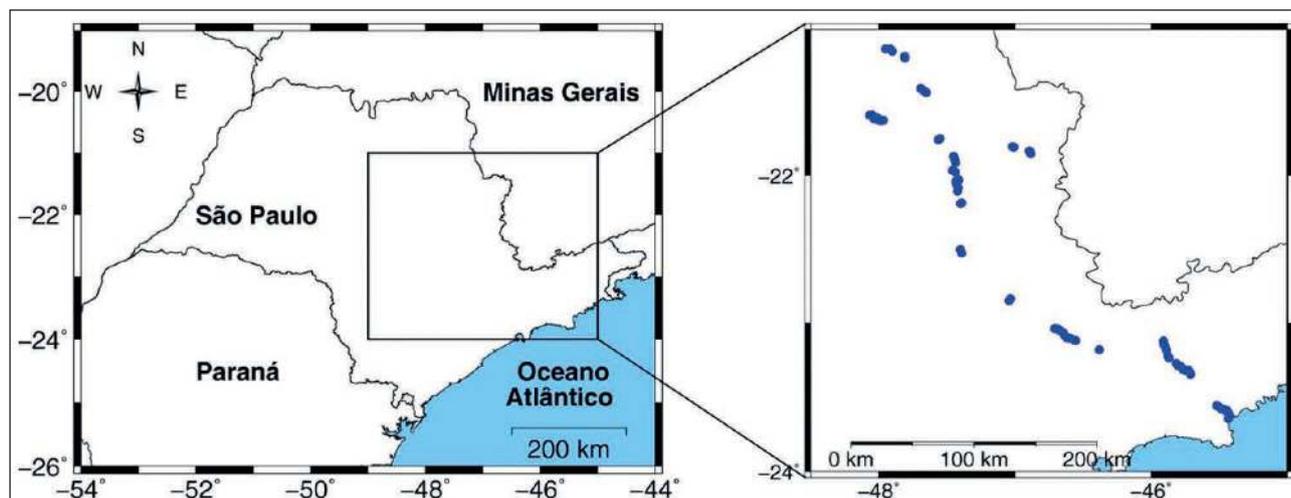


Figura 2 Distribuição dos pontos da RRNN (Rede de Referências de Nível) na área de estudo

#### 4 Resultados e Discussão

As altitudes niveladas calculadas através dos desníveis observados (dados brutos) têm discrepância de 23,80 centímetros, quando comparadas com as altitudes obtidas pelos memoriais descritivos das RRNN pertencentes à rede de nivelamento ajustada e corrigida do IBGE (<http://www.bdg.ibge.gov.br/appbdg/>). Um experimento parecido foi realizado por Severo *et al.* (2013), onde uma linha de nivelamento de aproximadamente 308 km e 1179 metros de desnível apresentou discrepância de 13,63 cm.

As estatísticas para os resultados obtidos no cálculo das correções para a altitude ortométrica rigorosa, em termos de valores máximos e mínimos, média, desvio padrão são apresentadas na Tabela 1.

Avalia-se que os dois primeiros termos, possuem valores estatisticamente nulos, que neste caso

Correções para Altitude Ortométrica de Helmert	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)
Mínimo	-0,013	-0,013	-1,646	-11,788	-14,333
Máximo	0,000	0,000	1,604	1,401	3,801
Média	-0,007	-0,006	0,479	-1,346	-2,582
Desvio padrão	0,003	0,002	0,776	2,284	4,652

Tabela 1 Estatísticas de cada correção aplicada a altitude ortométrica de Helmert

serão descartados. Estas duas correções,  $\delta g$  e  $\delta g'$ , estão diretamente ligadas a diferença de altitude, que neste caso tem um valor máximo de 800 metros, porém Santos *et al.* (2006), Tenzer *et al.* (2005), Kingdon *et al.* (2005) discutiram um exemplo do monte Everest, onde com 8,8 km de altitude os valores das duas correções são respectivamente, 1,5 cm e -1,6 cm, o que cientificamente falando são valores consideráveis. Já as outras três correções apresentaram valores que não se pode desconsiderar. A Figura 3A, 3B e 3C ilustram as correções parciais obtidas ao longo do fio de prumo na linha de nivelamento. A terceira correção (Figura 3A), (ou correção da não-topografia), possui valores estatísticos com impacto limitado na correção das altitudes (Tabela 1). A quarta correção (Figura 3B),  $\delta g'$ , é a segunda maior correção e está diretamente ligada à negligência do efeito do terreno/ rugosidade no modelo *Poincaré-Pray*, onde se assume uma densidade de massa topográfica constante, e o campo gravitacional do termo de rugosidade do terreno não é harmônico dentro da topografia. Como tal, foi calculado a partir de um modelo adotado da forma da topografia (ou seja, um *Digital Elevation Model*). A última correção (Figura 3C),  $\delta g''$ , está ligada as densidades de massas acima do geóide, foi a maior correção aplicada, tendo um grande impacto nas correções das altitudes. A Figura 4 mostra a correção total aplicada às altitudes. Após convertidas, as altitudes ortométricas rigorosas, tem-se um sistema corrigido e com sentido físico.

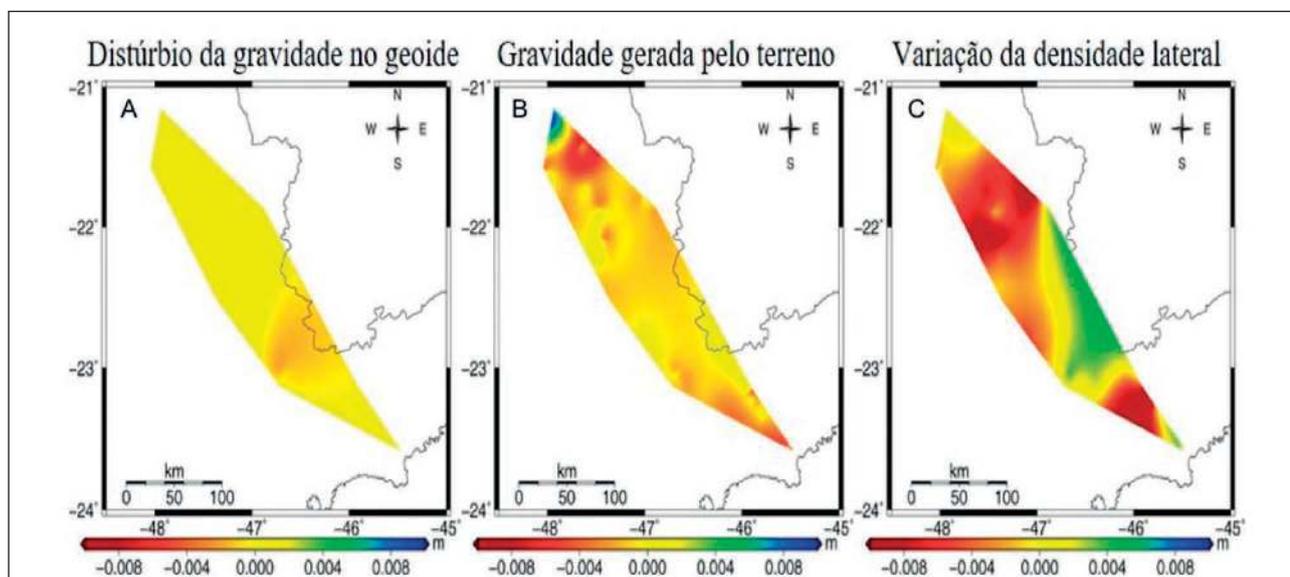


Figura 3 Correções parciais da gravidade média de Helmert ao longo do fio de prumo

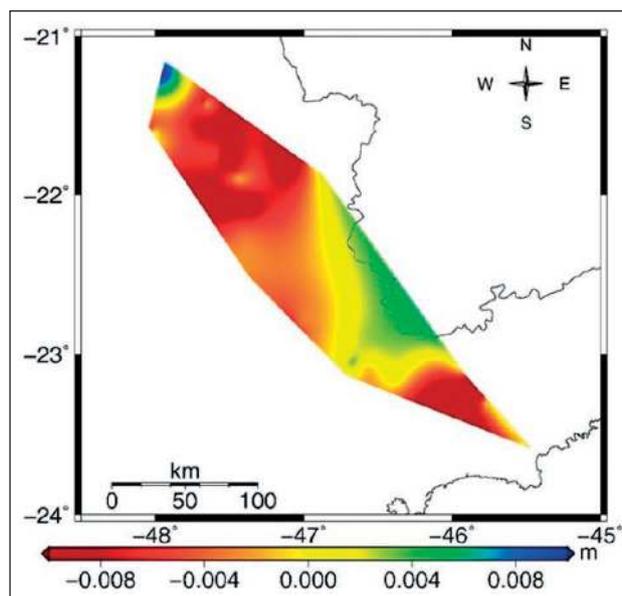


Figura 4 Correção Total Aplicada às altitudes de Helmert

Com a conversão das altitudes ortométricas de Helmert em Ortométrica Rigorosa, tem-se calculadas todas as altitudes científicas, e pode-se realizar as comparações entre as separações geoide/quase-geoide obtidas a partir das altitudes ortométrica rigorosa e normal-ortométrica, ao longo da linha de nivelamento. A Tabela 2 mostra os valores estatísticos da separação geoide/quase-geoide obtidos ao longo da linha de nivelamento, onde se pode notar que a separação obtida através da altitude normal-ortométrica possui valores maiores do que a calculada através da altitude ortométrica rigorosa, tendo valores, respectivamente, entre -0,532 a 0,515 m e -0,070 a 0,244 m. Para verificar quais pontos da linha de nivelamento tiveram maiores diferenças entre a separação geoide/quase-geoide, realizou-se uma análise ponto a ponto e para uma melhoria desta análise separou-se a linha de nivelamento em três trechos (Figura 5). Para cada trecho foi calculada a separação entre as altitudes (A) Ortométrica Rigorosa e (B) Normal-ortométrica.

No primeiro trecho pode ser observada uma variação de altitude severa, do litoral (Caraguatatu-

Estatísticas	Min (m)	Max (m)	Média (m)	Desvio Padrão (m)
Normal-Ortométrica	-0,532	0,515	0,043	0,120
Ortométrica Rigorosa	-0,070	0,244	0,056	0,051

Tabela 2 Resultado estatístico da separação geoide/quase-geoide

ba) subindo a serra para São José dos Campos, e vê-se que no litoral os pontos estão com a mesma separação, porém quando começam a ter uma variação de altitude maior, os valores da separação aumentam quando calculados pela normal-ortométrica (B) ficando entre 0,05 e 0,15 m, já para a ortométrica rigorosa (A), os valores são mais baixos, entre 0,05 e 0,10 m. No segundo trecho, que podemos chamar de transição entre o litoral e interior do estado, os valores se mantêm entre 0,05 e 0,15 m para a altitude normal-ortométrica (B). Já para a separação calculada pela ortométrica rigorosa (A), os valores diminuem, com valores entre 0 e 0,10 m. No último trecho, onde a variação de altitude é menor, a separação calculada pela normal-ortométrica (B) é mais homogênea, apresentando valores entre -0,05 e 0,05 m, tendo apenas um ponto com 0,15m. O mesmo não acontece com a separação calculada pela ortométrica rigorosa (A), onde os valores estão esparsos ficando entre -0,05 e 0,10 m, com alguns pontos chegando em 0,15m. As Figuras 6A e 6B ilustram a comparação estatística em termos de histogramas. Na Figura 6A, pode ser observado que o gráfico da distribuição normal tem uma diferença padrão menor em relação à Figura 6B e que a maior concentração de pontos está no intervalo de -0,2 a 0,2 m. A Figura 7 ilustra o comportamento da separação geoide/quase-geoide ao longo da linha de nivelamento, onde pode ser visto que o comportamento da separação entre as altitudes Normal e Ortométrica Rigorosa é mais suave no trecho montanhoso, e a separação calculada entre Normal e Normal-ortométrica tem o mesmo comportamento no interior do estado, onde a variação da altitude é menor.

Para averiguar qual dos dois sistemas está mais próximo do ideal, calculou-se pelo ICGEM, os valores para os modelos geoidal e quase-geoidal, utilizando-se dos modelos EIGEN-6C4 e GECO, e realizou-se a diferença entre eles, resultando na Figura 8, onde se verifica que os valores estão entre 0 e 0,2 m, o que está em concordância com os valores calculados através do sistema de altitude ortométrica rigorosa. Encontrou-se o mesmo resultado quando se realizou uma comparação ponto a ponto (Figuras 9A e 9B), onde verifica-se que os valores obtidos confirmam que estes dois modelos globais, possuem a separação geoide/quase-geoide mais próximas do sistema de altitude ortométrica rigorosa, com valores entre 0 e 0,15 m.

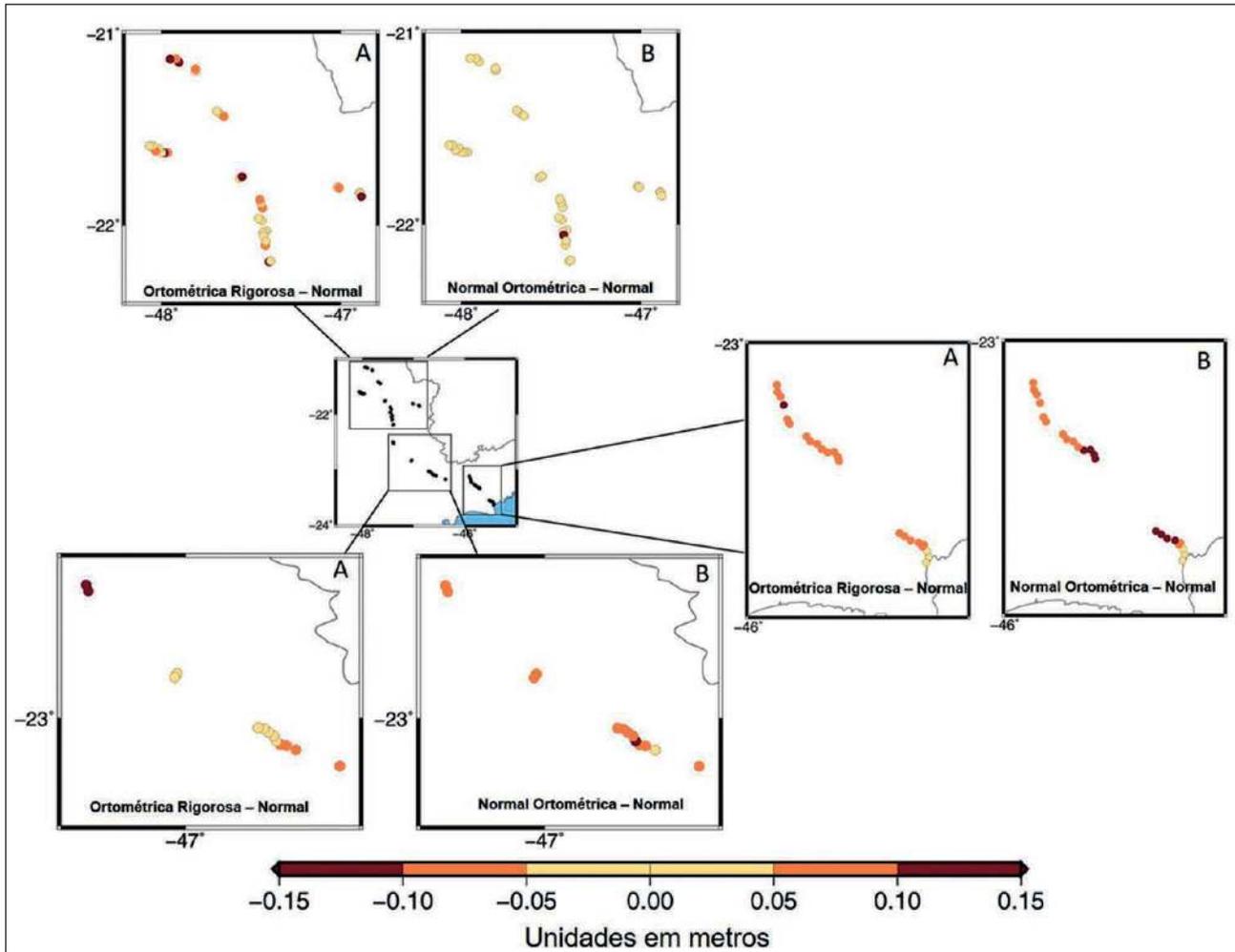


Figura 5 Separação entre geóide e quase geóide (A) Altitude Ortométrica Rigorosa menos Altitude Normal e (B) Altitude Normal- Ortométrica menos Altitude Normal.

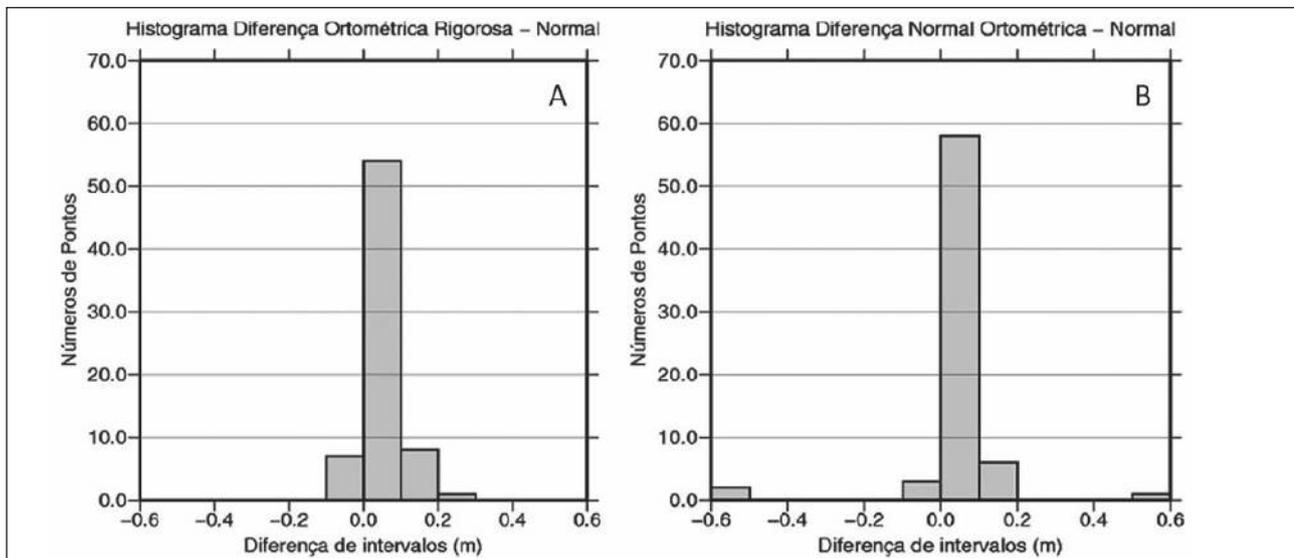


Figura 6 Histograma Ortométrica Rigorosa (A); Histograma Normal-ortométrica (B)

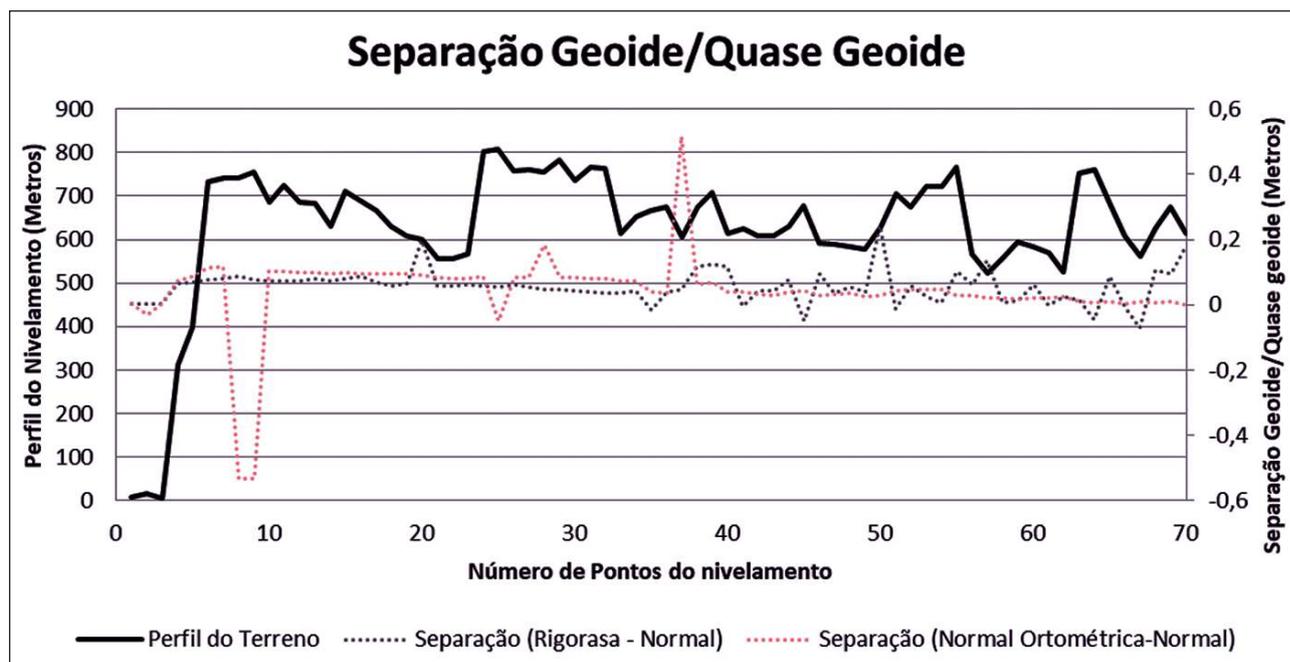


Figura 7 Comportamento da separação entre geoide/quase-geoide ao longo do perfil nivelado

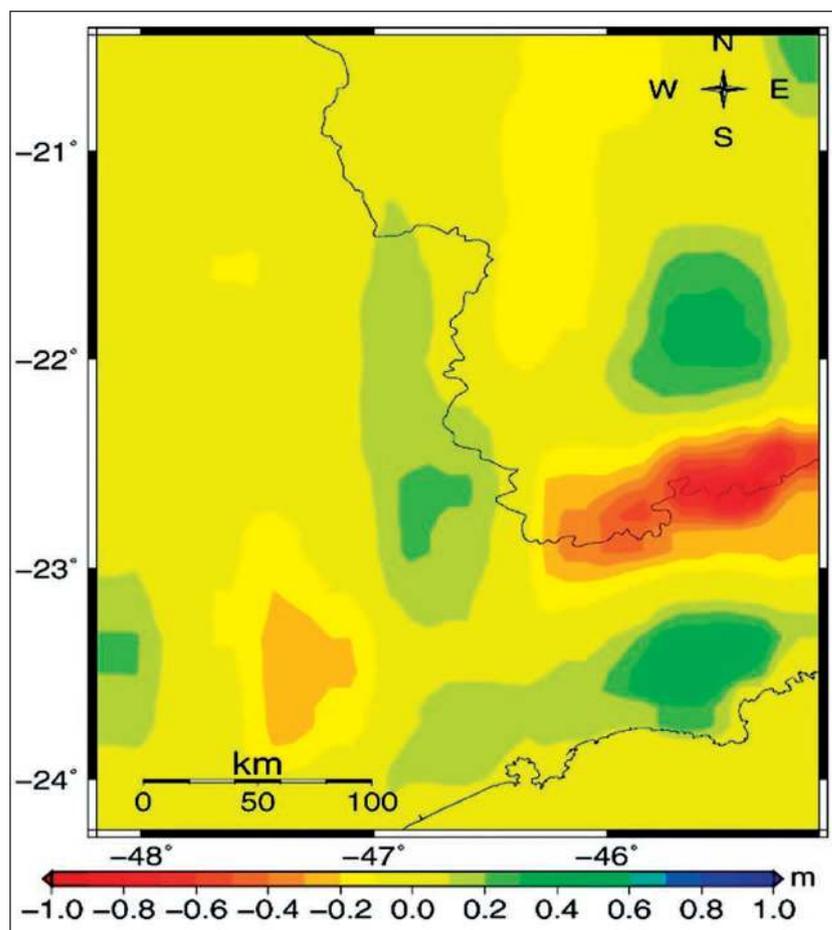


Figura 8 Diferença dos modelos EIGEN-6C4 e GECO entre separação geoide e quase-geoide

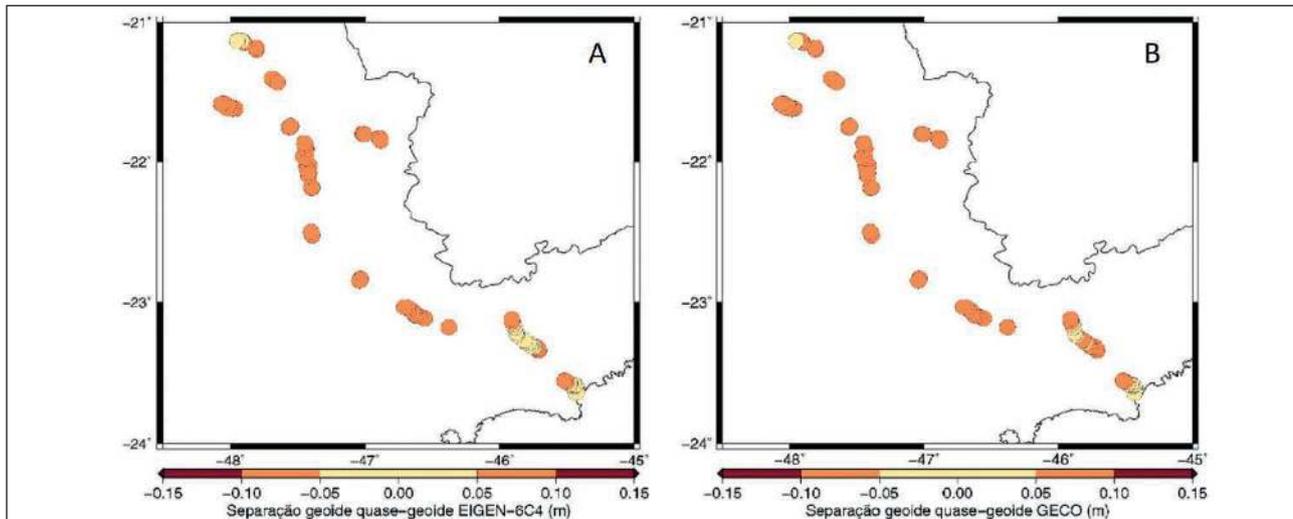


Figura 9 Análise da separação geoide/quase-geoide ponto a ponto: (A) EIGEN-6C4 e (B) GECO

## 5 Conclusão

Dentro da problemática que envolve a realização de um sistema altimétrico moderno, o avanço tecnológico (como melhoria dos modelos de elevação e de densidade topográfica) tem auxiliado os esforços dos pesquisadores na melhoria da realização destes sistemas. Dentro do contexto brasileiro o IBGE tem realizado consideráveis esforços para a modernização do sistema brasileiro, não apenas com a correção de não paralelismo, mas também com a adição de observações de gravidade nas linhas de nivelamento. Essa modernização vem ao encontro com o princípio básico estabelecido pelo Grupo de Trabalho III - *Datum* Vertical. O novo sistema de referência vertical do SIRGAS (Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas) baseia-se em duas componentes: uma geométrica e outra física, onde a componente física é dada em quantidades de potencial ( $W_0$  como um nível de referência e números geopotenciais como principal coordenada vertical).

O experimento aqui realizado sobre uma linha de nivelamento no estado de São Paulo tem como objetivo avaliar a separação entre geoide e quase geoide, através do cálculo das altitudes normal e ortométrica rigorosa. Esta última, nunca avaliada no contexto brasileiro, uma vez que a altitude normal-ortométrica é a que faz parte do sistema geodésico brasileiro.

De acordo com os resultados alcançados, é possível concluir que as RRNN (1980U (Caraguatatuba) até 42M (Ribeirão Preto)), quando analisadas dentro de um cenário regional, possuem a menor separação geoide/quase-geoide quando se calcula pelo sistema de altitude ortométrica rigorosa. Verifica-se também que a separação quando calculada pela normal-ortométrica possui valores mais altos, principalmente no local onde se tem as maiores altitudes ficando com intervalo de -0,5 a 0,5 metros. Já quando se compara com a separação obtida com a altitude ortométrica rigorosa, esta possui valores mais suaves entre -0,05 e 0,20 metros, devido à correção de densidade lateral de massas e rugosidade do terreno utilizadas no cálculo das altitudes ortométricas rigorosas. Assim, como a separação entre geoide e quase-geoide é menor no sistema de altitude ortométrica rigorosa, pode-se concluir que este sistema é mais acurado. Com a constatação de que a altitude ortométrica rigorosa melhorou o sistema altimétrico, recomenda-se testes futuros de aplicação em áreas maiores, para avaliar seu potencial no território brasileiro.

## 6 Agradecimentos

Os autores agradecem ao CAPES (processo PDSE n° 88881.132305/2016-01) pela bolsa concedida, à Unicamp e à Geodesy and Geomatic Engi-

neering – University of New Brunswick pelo apoio durante o período do doutorado Sanduíche, ao IF-SULDEMINAS pela licença do primeiro autor no desenvolvimento do doutorado e ao IBGE pelos dados fornecidos.

## 7 Referências

- Ferreira, V.G.; Freitas, S.R.C. & Heck., B. 2011. A separação entre o geoide e o quase-geoide: uma análise no contexto brasileiro. *Revista Brasileira de Cartografia*, 63: 39–50.
- Foroughi, I. & Tenzer, R. 2017. Comparison of different methods for estimating the geoid-to-quasi-geoid separation, *Geophysical Journal International*, 210(2): 1001–1020.
- Foroughi, I.; Vaníček, P.; Sheng, M.; Kingdon, R. & Santos, M. 2017. In defense of the classical height system. *Geophysical Journal International*, 211(2): 1176–1183.
- Flury, J. & Rummel, R. 2009. On the geoid–quasi-geoid separation in mountain areas, *Journal of Geodesy*, 83(9): 829–847.
- Förste, C.; Bruinsma, S.L.; Abrikosov, O.; Lemoine, J.M.; Marty, J.C.; Flechtner, F.; Balmino, G.; Barthelmes, F. & Biancale, R. 2014. EIGEN-6C4 The latest combined global gravity field model including GOCE data up to degree and order 2190 of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse. *GFZ Data Services*: <http://doi.org/10.5880/icgem.2015.1>.
- Freitas, S.R.C. & Blitzkow, D. 1999. Altitudes e geopotencial. Milão, *Iges Bulletin*, 9: 47–61.
- Gilardoni, M.; Reguzzoni, M. & Sampietro, D. 2016. GECO: a global gravity model by locally combining GOCE data and EGM2008. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 60: 228–247.
- Heiskanen, W.A. & Moritz, H. 1967. *Physical Geodesy*, W. H. Freeman, San Francisco, CA. 364p.
- Hofmann-Wellenhof, B. & Moritz, H. 2006. *Physical Geodesy*, Springer-Verlag, Berlin. 397 p.
- Kingdon, R.; Vaníček, P.; Santos, M.; Ellmann, A. & Tenzer, R. 2005. Toward an improved orthometric height system for Canada. *Geomatica*, 59(3): 241–250.
- Kingdon, R.; Vaníček P. & Santos, M. 2009. Modeling topographical density for geoid determination. *Canadian Journal of Earth Sciences*, 46: 571–585.
- Pina, W.H.; Pinheiro, R.R.; Santos, C.C.C.; Di Maio Pereira, N.R. & Goldani, D. 2006. Reajustamento Global da Rede Altimétrica de Alta Precisão do Brasil – RAAP. In: CONFERÊNCIA NACIONAL DE GEOCIÊNCIAS, 4, Rio de Janeiro.
- Santos, M.C.; Vaníček, P.; Featherstone, W.E.; Kingdon, R.; Ellmann, A.; Martin, B.A.; Kuhn, M. & Tenzer, R. 2006. The relation between Rigorous and Helmert’s definition of orthometric heights. *Journal Geodesy*, 80: 691–704.
- Sánchez, L. 2013. Towards a vertical datum standardisation under the umbrella of Global Geodetic Observing System. *Journal of Geodetic Science*, 2(4): 325–342.
- Severo, T.C.; Souza, S.F.; Matsuoka, T.M. & Aleksei, K.G. 2013. Estudo das correções gravimétricas para altitudes físicas aplicadas aos desníveis da RAAP. *Boletim de Ciências Geodésicas*, 19(3): 472–497.
- Tenzer, R.; Vaníček, P.; Santos, M.C.; Featherstone, W.E. & Kuhn, M. 2005. The rigorous determination of orthometric heights - *Journal Geodesy*, 79: 82–92.
- Vaníček, P.; Santos, M.C.; Tenzer, R. & Navarro, A.H. 2003. Algunos aspectos sobre alturas ortométricas y normales. *Revista Cartográfica*, 76/77: 79–86.