UMA APLICAÇÃO DE MÉTODOS ESTATÍSTICOS E PROJETIVOS AO ESTUDO DAS DISTRIBUIÇÕES ESTELARES

SERGIO MENGE DE FREITAS

Departamento de Astronomia

Abstract - The present work concerns itself with an association between methods applied in statistics and in descriptive geometry, namely, those of the regression analysis and of the orthogonal projections. It is demonstrated that regression plane can be obtained without the use of multiple linear regression the option being the use of regression lines, with the advantage of providing better visualization of the spatial distribution.

O estudo de uma distribuição espacial de estrelas provavelmente se tornaria mais produtivo se pudéssemos associar o máximo de informação analítica ao máximo de visualização.

Projetando-se ortogonalmente os pontos (estrelas) em três planos de um triedro tri-ortogonal, facilmente podemos obter não apenas uma reta ajustante para cada projeção, mas também o coeficiente de correlação, o qual é indicativo da qualidade de cada ajustamento.

Cada uma destas retas mostra uma tendência da distribuição de pontos, vista de três posições diferentes, e isto fornece uma visualização muito mais óbvia do que teríamos através do plano ajustante ou de seus traços nos planos do triedro.

Contudo, o plano ajustante teria a vantagem de nos proporcionar informações analíticas como pontos de sua interseção com os eixos, sua inclinação em relação a cada plano do triedro e sua distância à origem.

Desta associação de métodos da Estatística e das Geometrias Descritiva e Analítica poderiam resultar interessantes estudos comparativos, não só entre as distribuições de diversos tipos de estrelas como também entre distribuições de um mesmo tipo, passando-se de espaços mais restritos a espaços mais amplos.

O plano ajustante pode ser obtido de modo relativamente simples, dispensando-se a regressão linear múltipla, e partindo-se das retas acima mencionadas, como veremos abaixo, através da dedução de um teorema.

Um plano ajustante obtido por regressão linear múltipla pode ser definido pela equação

$$z = a \quad + a_1x + a_2y \qquad \text{ou} \qquad a_1x + a_2y - z + a \quad = 0$$

onde os coeficientes são obtidos de

$$\sum z = a_0 n + a_1\sum x + a_2\sum y$$
$$\sum xz = a_0\sum x + a_1\sum x^2 + a_2\sum xy$$
$$\sum yz = a_0\sum y + a_1\sum xy + a_2\sum y^2$$

e n é o número de pontos.

Adotemos, por conveniência, a seguinte notação:

$$\sum x = A \qquad \sum x^2 = B$$
$$\sum y = C \qquad \sum y^2 = D$$
$$\sum z = E \qquad \sum z^2 = F$$
$$\sum xy = G \qquad \sum xy \;= H \qquad \sum yz = I$$

Resolvendo o sistema acima, teremos:

$$a = \frac{BDE + AGI + AGH + BCI - EG^2 - ADH}{nBD + 2ACG - BC^2 - nG^2 - A^2D}$$

$$a_1 = \frac{nDH + CEG + ACI - C^2H - nIG - ADE}{nBD + 2ACG - BC^2 - nG^2 - A^2D}$$

$$a_2 = \frac{nBI + ACH + AEG - BCE - nGH - A^2I}{nBD + 2ACG - BC^2 - nG^2 - A^2D}$$

Projetando-se os pontos ortogonalmente em três planos perpendiculares entre si e obtendo-se uma reta de mínimos quadrados para cada projeção, teremos três visualizações da distribuição dos pontos, cada uma de um ponto de vista distinto. Por outro lado a equação de um plano ajustante, se prejudica esta visualização, tem a vantagem de nos conduzir à Geometria Analítica, a qual nos proporciona outras informações e até mesmo diferentes visualizações, como seria o caso dos traços do plano ajustante sobre o triedro de referência.

Uma tentativa para conciliar ambos os aspectos exige que verifiquemos se existem relações entre as retas ajustantes em cada projeção e o plano ajustante no espaço.

Consideremos o plano XY, onde a reta ajustante é

$$y = mx + b \qquad \text{sendo} \qquad m = \frac{nG - AC}{nB - A^2}$$

$$b = \frac{C}{n} - \left(\frac{nAG - A^2C}{n^2B - nA^2}\right)$$

No plano XZ, teremos a reta ajustante

$$z = jx + k \qquad \text{sendo} \qquad j = \frac{nH - AE}{nB - A^2}$$

$$k = \frac{E}{n} - \left(\frac{nAH - A^2E}{n^2B - nA^2}\right)$$

Tomando o valor de x em cada reta e igualando, temos:

$$x = \frac{y - b}{m} = \frac{z - k}{j}$$

que é a forma simétrica da equação de uma reta L_1 no espaço, obtida como interseção dos planos projetantes levantados das duas retas de mínimos quadrados.

L_1 pertencerá ao plano ajustante ou será paralela a ele se

$$a_1 + a_2 m - j = 0$$

Substituindo, temos

$$\frac{nDH + CEG + ACI - C^2H - nIG - ADE}{nBD + 2ACG - BC^2 - nG^2 - A^2D} +$$

$$+ \left(\frac{nBI - ACH + AEG - BCE - nGH - A^2I}{nBD + 2ACG - BC^2 - nG^2 - A^2D}\right)\left(\frac{nG - AC}{nB - A^2}\right) - \frac{nH - AE}{nB - A^2} = 0$$

Portanto, a condição se verifica; L_1 ou pertence ao plano ajustante ou lhe é paralela.

Notemos que esta reta inclui o ponto P_1 (0, b, k). Vejamos se P_1 também está incluído no plano ajustante. Substituindo suas coordenadas na equação do plano e efetuando algumas operações, temos

$$\left(\frac{nBI + ACH + AEG - BCE - nGH - A^2I}{nBD + 2ACG - BC^2 - nG^2 - A^2D}\right)\left(\frac{BC - AG}{nB - A^2}\right) - \frac{BE - AH}{nB - A^2} +$$

$$\frac{BDE + AGI + CGH - BCI - EG^2 - ADH}{nBD + 2\,ACG - BC^2 - nG^2 - A^2D} = 0$$

Portanto, P_1 pertence ao plano ajustante e, consequentemente, a reta L_1 está contida em tal plano.

Consideremos novamente o plano XY, onde podemos ter uma segunda reta de mínimos quadrados

$$x = m'y + f \qquad \text{sendo} \qquad m' = \frac{nG - AC}{nD - C^2}$$

$$\text{e} \qquad f = \frac{A}{n} - \left(\frac{nCG - AC^2}{n^2D - nC^2}\right)$$

No Plano YZ, teremos a ajustante

$$z = j'y + k' \qquad \text{onde} \qquad j' = \frac{nI - CE}{nD - C^2}$$

$$\text{e} \qquad k' = \frac{E}{n} - \left(\frac{nCI - C^2E}{n^2D - nC^2}\right)$$

Tomando o valor de y em cada reta e igualando, temos:

$$\frac{x - f}{m'} = y = \frac{z - k'}{j'}$$

o que define a reta L_2, no espaço. Procedendo como antes, por meio do ponto P_2 (f, o, k') podemos provar que L_2 também está incluída no plano ajustante.

A condição de paralelismo

$$\frac{1}{m'} = \frac{m}{1} = \frac{j}{j'}$$

não se verifica; portanto, L_1 e L_2 são retas concorrentes.

Das formas simétricas, obtemos o sistema

$$x = \frac{y - \frac{C}{n} - \frac{A}{n}\left(\frac{nG - AC}{nB - A^2}\right)}{\frac{nG - AC}{nB - A^2}}$$

$$y = \frac{x - \frac{A}{n} - \frac{C}{n}\left(\frac{nG - AC}{nD - C^2}\right)}{\frac{nG - AC}{nD - C^2}}$$

$$z = x\left(\frac{nH - AE}{nB - A^2}\right) + \frac{E}{n} - \frac{A}{n}\left(\frac{nH - AE}{nB - A^2}\right)$$

cuja solução é

$$x = \frac{A}{n} \qquad y = \frac{C}{n} \qquad z = \frac{E}{n}$$

ou

$$x = \frac{\sum x}{n} = \bar{x} \qquad y = \frac{\sum y}{n} = \bar{y} \qquad z = \frac{\sum z}{n} = \bar{z}$$

o que nos fornece um terceiro ponto do plano ajustante, P_3 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ que é, como vemos, o ponto de coordenadas médias.

Assim, temos o seguinte teorema:

"Consideremos uma distribuição espacial de pontos, projetada ortogonalmente sobre três planos: XY - Horizontal; XZ - vertical; YZ - de perfil. Tomemos, no plano horizontal, uma reta ajustante para y = f(x) e outra para x = g(y). A primeira destas e a ajustante z = h(x) do plano vertical são projeções de uma reta L_1 no espaço. A segunda, e a ajustante $z = l(y)$ do plano de perfil são projeções de uma reta L_2 no espaço. As retas L_1 e L_2 são concorrentes, definindo o plano ajustante, e se cruzam no ponto de coordenadas médias".

Os três pontos já determinados, P_1 (0, b, k), P_2 (f, 0, k') e P_3 ($\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$) permitem obter, através da Geometria Analítica, a equação do plano ajustante.

O mesmo conjunto de pontos pode ser projetado em diferentes triedros, de acordo com a conveniência; um triedro adequadamente escolhido pode tornar mais evidentes certas peculiaridades da distribuição que talvez passassem despercebidas em outras projeções.

No que diz respeito às retas ajustantes e respectivos coeficientes de correlação, qualquer projeção pode ser subdividida em diversas outras, não só por quadrantes do plano de projeção, como também conforme a coordenada projetante (que não aparece na projeção) seja positiva ou negativa. Qualquer discrepância resultante poderá sugerir a presença de perturbações, ou de zonas de transição, indicando simultaneamente as respectivas localizações.

Quanto aos volumes a serem considerados, os pontos podem estar incluídos em esferas de diferentes raios ou em cubos de diferentes arestas, ou ainda em cubos de mesmas dimensões e contíguos, este último caso oferecendo a possibilidade de expansões modulares.

A determinação do ponto de coordenadas médias, além de necessária para o cálculo do plano ajustante, ainda proporciona uma vantagem adicional, pois que indica uma posição aproximada para o centro de massa do conjunto considerado. Convém relembrar que 90% ou mais das estrelas possuem massas dentro da mesma ordem de grandeza; e a maioria dos estudos dinâmicos atribui às estrelas a mesma massa (em geral, 0,5 massas solares).

Como exemplo de aplicação, consideremos algumas distribuições de estrelas O, B e dMe, que serão projetadas num único triedro. Este exemplo não tem outro fim além de ser meramente ilustrativo, de vez que as distâncias envolvidas não são rigorosamente determinadas, contendo erros da ordem de 10 ou 20% e de vez que não levaremos em conta tais erros. Por esta razão, as duas casas decimais que aparecem nos resultados obtidos não são significativas.

As coordenadas retangulares x, y, z foram obtidas de coordenadas galáticas e distâncias (estas em parsecs). O plano galático é o plano XY, onde x e y são positivos na direção do centro galático e na do vetor velocidade tangencial de rotação galática, respectivamente. Os valores de z são positivos para norte do plano galático, e o Sol está situado na origem do sistema retangular.

O plano galático (XY) corresponderá a um plano horizontal, e os planos XZ e YZ serão planos vertical e de perfil, respectivamente. Em razão disto, os coeficientes de correlação serão denotados por r_h, r_v, e r_p, e os ângulos entre as retas ajustantes e o eixo das abscissas (X nos planos horizontal e vertical, Y no de perfil) serão denotados por α_h, α_v e α_p.

Os dados referentes às estrelas O e B foram obtidos conforme abaixo:

a) Tipo Espectral e Classe de Luminosidade: A. Becvar Atlas Coeli II (1959) e U.S. Naval Observatory Photometric Catalog (Publications-Second Series Vol. XXI). Em casos conflitantes, a identificação de uma estrela como O ou B em uma só das publicações acima foi o critério para que assim a considerássemos neste trabalho.

b) Coordenadas: mesmas publicações. As coordenadas galáticas (1950.0) foram tiradas da segunda ou convertidas de coordenadas uranográficas (1950.0) dadas pela primeira publicação.

c) Distâncias: foram obtidas de paralaxes dadas na primeira publicação acima, ou no Yale Parallax Catalog (pelo valor mais provável), quando a estrela constava de ambos os catálogos.

Os dados relativos às estrelas dMe foram obtidos conforme abaixo:

a) Tipo Espectral e Classe de Luminosidade: U.S. Naval Observatory Photometric Catalog (acima referido), e Catalog of Nearby Stars de W. Gliese (1969).

b) Coordenadas: mesmas publicações; coordenadas galáticas tiradas da primeira publicação, ou convertidas de coordenadas equatoriais celestes dadas pela segunda.

c) Distâncias: segunda publicação acima.

TABELA I: ESTRELAS O,B

(d, x, y, z em pc)

Estrela nº HD	Classe MK	d	x	y	z
000 358	B8 III	32.26	-10.03	+25.18	-17.49
002 884	B8 V(B9)	33.33	+11.72	-15.69	-26.97
005 394	B0 IV e	29.41	-16.26	+24.48	- 1.10
010 144	B5 V B9 V	43.48	+ 8.01	-21.05	-37.10
011 502	B9 V + A1	47.62	-28.44	+21.80	-31.36
015 130	B9 V	45.45	-20.34	- 1.33	-40.62
015 318	B9 III	45.45	-28.85	+10.69	-33.45

Estrela nº HD	Classe MK	d	x	y	z
017 573	B8 V	32.26	-25.23	+12.87	-15.44
019 356	B8	25.00	-20.70	+12.45	- 6.43
020 319	B9n	28.57	-18.33	- 2.52	-21.77
021 364	B8p	50.00	-39.58	+ 4.16	-30.27
023 850	B8 III	35.71	-31.98	+ 7.38	-14.08
024 071	B9 + B3	41.67	-12.90	-22.49	-32.62
027 742	B9 V	50.00	-46.92	+ 3.85	-16.83
032 964	B9	47.62	-39.08	-18.03	-20.39
033 949	B8 V	33.33	-24.54	-16.48	-15.41
035 468	B2 III	38.46	-35.38	-10.76	-10.56
035 715	B2 IV	43.48	-39.00	-14.27	-12.87
037 043	O9 III	47.62	-39.04	-22.10	-15.97
037 742	O9.5 I e	45.45	-39.00	-19.40	-12.98
039 764	B5 V	35.71	-16.34	-27.60	-15.70
041 117	B2 Ia e	43.48	-42.85	- 7.33	- 0.65
041 753	B3 V	29.41	-28.40	- 7.51	- 1.39
043 107	B8 V (B9)	50.00	+ 6.84	-43.19	-24.24
045 725	B3 V e	45.45	-36.09	-26.86	- 6.48
047 670	B8 III	43.48	-12.63	-38.71	-15.25
058 715	B8 V (B7) e	50.00	-42.61	-24.13	+10.11
061 330	B8 V	40.00	-14.26	-37.08	- 4.65
080 081	B9 V	30.30	-21.47	- 2.56	+21.23
087 901	B7 V + KI V	25.64	-11.61	-12.20	+19.33
105 435	B2 B3 V e	50.00	+21.47	-44.03	+10.03
105 937	B3 B4 V	38.48	+17.07	-33.83	+ 6.70
116 658	BI V	47.62	+21.66	-20.85	+36.93
134 481	B9 IV V	47.62	-38.85	-26.74	+ 6.55
134 759	B9n	43.48	+35.20	-10.98	+23.04
138 749	B5 B6 B7 ne	50.00	+18.69	+22.03	+40.81
145 502	B2 IV V	50.00	+45.92	- 4.33	+19.30
145 483	B9 V	47.62	+44.62	- 9.69	+13.52
147 165	B1 III	19.29	+18.18	- 2.78	+ 5.62
147 394	B5 IV (B7)	37.04	+ 7.88	+24.96	+26.21
148 112	B9	30.30	+20.61	+11.64	+18.92
149 212	B9 IV	32.26	- 4.90	+24.99	+19.80
153 808	B9.5 V	45.45	+22.16	+29.25	+26.82
158 094	B8 V	45.45	+38.61	-21.16	-11.27
177 724	B9.5 V	27.78	+18.96	+20.24	+ 1.57
177 756	B7 B8 B9 V	40.00	+34.39	+20.06	- 3.83
186 882	B9.5 III	47.62	+ 9.17	+45.96	+ 8.46
209 952	B5 V B2 V	27.78	+16.67	- 2.94	-22.03
212 061	B9 III	25.00	+ 8.13	+15.40	-17.93
212 120	B6 IV V	29.41	- 3.94	+28.79	- 4.53

Estrela nº HD	Classe MK	d	x	y	z
218 045	B9 V B9.5 III	33.33	+ 0.76	+25.38	-21.59
218 918	B9	43.48	+ 2.35	+29.69	-31.68
222 661	B9 V	28.57	+ 3.78	+ 9.19	-26.79
224 151	B0.5 II	37.04	-15.86	+33.34	- 2.98
6 456	B9.5 IV - V	71.43	-32.55	+42.68	-47.13
6 457	B9	71.43	-32.55	+42.68	-47.13
9 531	B8 V	71.43	-43.64	+47.92	-30.03
10 516	B2 B1 (B0 III) e	55.56	-35.97	+40.91	-10.92
14 228	B8 V.	55.56	+ 2.54	-26.97	-48.51
16 978	B9 III	58.82	+13.32	-38.78	-42.18
23 302	B6 III e	52.63	-46.75	+11.49	-21.27
24 388	B7n	55.56	-40.13	-10.36	-37.00
25 642	B9 V	52.63	-46.29	+25.01	- 1.21
27 376	B8.5 V B9	55.56	-22.52	-31.79	-39.61
32 309	B9 V	52.63	-33.73	-28.59	-28.55
56 456	B8	52.63	- 9.36	-49.64	-14.75
59 067	B + G8	62.50	-42.28	-45.93	+ 2.93
59 256	B9	55.56	-25.20	-49.21	- 5.49
62 832	B9 V	52.63	-43.88	-24.65	+15.40
86 360	B9 or B9.5 V	66.67	-32.69	-31.68	+48.71
122 451	B1 II B3	62.50	+41.62	-46.60	+ 1.37
126 981	B6 IV B9	62.50	+46.80	-38.50	+15.28
135 734	B8n	58.82	+48.76	-31.86	+ 8.23
155 763	B6 III	58.82	- 5.03	+47.90	+33.77
195 810	B6 III B7	62.50	+34.00	+49.32	-17.83
198 667	B8 or B9	52.63	+33.93	+30.94	-25.72
212 097	B8 III or V	52.63	+ 2.49	+48.06	-21.31
212 581	B8 V or B9	66.67	+37.50	-27.36	-47.85
213 998	B8 V	58.82	+15.60	+36.46	-43.44

TABELA II: ESTRELAS dMe

(d, x, y, z em pc)

Estrela	Classe MKK	d	x	y	z
HD 24916 B	dM3 e	12.35	- 9.51	- 1.81	- 7.67
HD 26976 C	dM4 e	4.88	- 3.60	- 1.36	- 3.00
HD 111631	dM0.5 e	10.99	+ 2.77	- 4.33	+ 9.71
HD 119850	dM1.5 e (dM4)	4.97	+ 1.48	- 0.22	+ 4.74
HD 152751	dM3 e (dM4.5 e)	6.21	+ 5.68	+ 1.11	+ 2.24
HD 197481	dM0 e	8.84	+ 6.91	+ 1.55	- 5.29
HD 1326	M1 Ve + M6 Ve	3.54	- 1.50	+ 3.00	- 1.12
HD 36395	M1 Ve	5.88	- 4.95	- 2.50	- 1.96
HD 42581	dM1 e	5.74	- 3.60	- 4.08	- 1.81

Estrela	Classe MKK	d	x	y	z
DM +271311	dM0 e	20.00	-19.05	- 3.16	+ 5.19
GLIESE 278-C	M0.5 Ve	14.49	-13.28	- 1.73	+ 5.54
HD 79211 /0	M0 Ve + M0 Ve	6.02	- 4.27	+ 1.15	+ 4.08
GLIESE 338	M4.5 Ve	4.90	- 2.28	- 1.69	+ 3.99
GLIESE 452 4	M0 Ve	21.28	- 4.29	- 1.76	+20.77
HD 107596	M0 Ve	15.63	- 3.48	+ 2.63	+15.01
GLIESE 490 A	M0 Ve	17.54	- 1.02	+ 2.29	+17.36
HD 147379	M0 Ve	11.24	- 1.49	+ 8.55	+ 7.14
GLIESE 685	M1 Ve	14.93	- 0.17	+12.58	+ 8.04
HD 180617	M3.5 Ve	5.78	+ 4.39	+ 3.75	- 0.33
HD 199305	M2 Ve	7.29	- 1.09	+ 7.07	+ 1.40
HD 202560	M0 Ve	3.85	+ 2.75	+ 0.19	- 2.69
HD 217987	M2 Ve	3.58	+ 1.46	+ 0.13	- 3.26
GLIESE 908	M2 Ve	5.71	- 0.19	+ 3.12	- 4.78
YALE 2890	M4 e	4.47	- 1.98	+ 0.40	+ 3.99

Consideremos um cubo com aresta igual a 50 parsecs, tendo o Sol em seu centro. Este cubo inclui 12 estrelas O e B como se vê pela Tabela I. Uma regressão linear para cada plano fornece:

$$\text{Projeção XY:} \left\{ \begin{array}{l} r_h = 0.26 \\ b = +6.40 \\ \alpha_h = 11.36^{o} \end{array} \right.$$

$$\text{Projeção XZ:} \left\{ \begin{array}{l} r_v = 0.05 \\ k = +0.28 \\ \alpha_v = 2.63^{o} \end{array} \right.$$

$$\text{Projeção YZ:} \left\{ \begin{array}{l} r_p = 0.16 \\ k' = -0.96 \\ \alpha_p = 10.70^{o} \end{array} \right.$$

Uma regressão linear para YX fornece, obviamente, o mesmo r_h e proporciona uma coordenada $f = -4.84$, de acordo com o que vimos na demonstração acima.

Por meio dos três pontos

$$P_1 \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ y_1 = b = +6.40 \\ z_1 = k = +0.28 \end{array} \right. \qquad P_2 \left\{ \begin{array}{l} x_2 = f = -4.84 \\ y_2 = 0 \\ z_2 = k' = -0.96 \end{array} \right. \qquad \bar{P} \left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = -2.94 \\ \bar{y} = +5.81 \\ \bar{z} = +0.15 \end{array} \right.$$

onde $\bar{P}$ é o ponto de coordenadas médias, obtemos a equação do plano ajustante, que é

$$0.10x + 3.02y - 15.96z - 14.86 = 0$$

A distância do Sol a este plano ajustante é 0.91 pc, estando o Sol acima deste.

As interseções do plano ajustante com os eixos coordenados são

$x = + 148.60$

$y = + \quad 4.92$

$z = - \quad 0.93$

formando um ângulo de -10.65° com o plano galático.

Resultados para outros grupos, obtidos da mesma maneira, e reunidos aos acima, podem ser resumidos na **Tabela III**.

Façamos algumas considerações sobre os resultados **constantes** da Tabela III, anexa.

A melhor reta ajustante para cada grupo nunca está contida no plano de perfil e a pior nunca está contida no vertical.

Em cada grupo a ajustante de maior inclinação é também a que possui melhor coeficiente de correlação. Das quinze ajustantes, as primeiras seis, em ordem decrescente de inclinação, apresentam os seis melhores coeficientes de correlação, também em ordem decrescente.

Se levarmos em conta médias dos valores absolutos dos coeficientes de correlação, por plano, verificaremos que o plano vertical é o que apresenta os melhores coeficientes, seguido pelo plano horizontal. Assim, para os cinco casos, o plano de perfil é o que apresenta disposição menos ordenada.

Nas projeções XY e XZ dos grupos 1 e 5, notamos alguma similaridade entre os ângulos α_h e α_p de cada projeção. Estes dois grupos são os únicos que apresentam um plano ajustante com inclinação negativa em relação ao plano galático.

A projeção vertical (XZ) do grupo 2 indica a presença da Faixa de Gould. Se subdividirmos em y positivo e y negativo, teremos:

$y > 0: \alpha_v = 29.08^{\circ} \qquad \alpha_v = 0.58$

$y < 0: \alpha_v = 12.83^{\circ} \qquad \alpha_v = 0.35$

Assim, a Faixa de Gould parece ser muito mais inclinada e ordenada na região para a qual aponta o vetor velocidade tangencial de rotação galática.

Para o grupo 4, que abarca um volume um tanto maior, a inclinação da Faixa de Gould desaparece.

O Sol situa-se abaixo do plano ajustante apenas para os grupos 4 e 5 das estrelas de emissão, sejam elas B ou M. Este último aspecto torna convidativo tentar verificar se existe alguma relação entre a localização das estrelas e o fato de seus espectros apresentarem raias de emissão.

Acreditamos que esta associação de métodos possa ser desenvolvida e aplicada a muitos outros casos, talvez permitindo encontrar algumas relações até agora dissimuladas.

Desejamos agradecer aos Professores J. A. Buarque de Nazareth e Silio Vaz pelas sugestões; ao Professor J. A. S. de Campos pela programação da calculadora HP 9100 e ao Professor E. Rangel Netto por muitos cálculos e todas as verificações.

TABELA III

GRUPO DE ESTRELAS (SOL NO CENTRO)	PROJEÇÃO XY (HORIZONTAL) (PLANO GALÁTICO)	PROJEÇÃO XZ (VERTICAL)	PROJEÇÃO YZ (PERFIL)	$\overline{P}$ (PONTO DE COORDDENADAS MÉDIAS)	DISTÂNCIA DO SOL (ORIGEM) AO PLANO AJUSTANTE (PC)	ÂNGULO ENTRE OS PLANOS AJUSTANTE E GALÁTICO	INTERSEÇÃO DO PLANO AJUSTANTE COM OS EIXOS
1) 12 estrelas O,B incluídas num cubo c/ aresta 50 pc	$\alpha_h = 11.36^\circ$ $r_h = 0.26$	$\alpha_v = 2.63^\circ$ $r_v = 0.05$	$\alpha_p = 10.70^\circ$ $r_p = 0.16$	$\bar{x} = -2.94$ $\bar{y} = +5.81$ $\bar{z} = +0.15$	0.91 (sun above)	-10.65°	$x = +148.60$ $y = +4.92$ $z = -0.93$
2) 54 estrelas O,B incluídas numa esfera c/ raio 50 pc	$\alpha_h = 2.85^\circ$ $r_h = 0.06$	$\alpha_v = 17.95^\circ$ $r_v = 0.42$	$\alpha_p = 4.65^\circ$ $r_p = 0.09$	$\bar{x} = -5.46$ $\bar{y} = -1.94$ $\bar{z} = -5.74$	3.60 (sun above)	$+18.51^\circ$	$x = +11.90$ $y = +36.01$ $z = -3.79$
3) 79 estrelas O,B incluídas num cubo c/ aresta 100 pc	$\alpha_h = -0.04^\circ$ $r_h = -0.04$	$\alpha_v = 0.19^\circ$ $r_v = 0.24$	$\alpha_p = -0.04^\circ$ $r_p = -0.06$	$\bar{x} = -6.67$ $\bar{y} = -2.07$ $\bar{z} = -9.04$	7.74 (sun above)	$+10.99^\circ$	$x = +41.50$ $y = -219.60$ $z = -7.88$
4) 9 estrelas Be (cubo idêntico ao acima)	$\alpha_h = -4.32^\circ$ $r_h = -0.07$	$\alpha_v = 27.07^\circ$ $r_v = 0.75$	$\alpha_p = -0.48^\circ$ $r_p = -0.01$	$\bar{x} = -24.37$ $\bar{y} = -2.54$ $\bar{z} = +0.84$	11.93 (sun below)	$+27.20^\circ$	$x = -26.14$ $y = -506.92$ $z = +13.42$
5) 24 estrelas dMe incluídas numa esfera c/ raio 56 pc	$\alpha_h = 12.85^\circ$ $r_h = 0.33$	$\alpha_v = -8.88^\circ$ $r_v = -0.12$	$\alpha_p = 10.55^\circ$ $r_p = 0.10$	$\bar{x} = -2.10$ $\bar{y} = +1.04$ $\bar{z} = +3.22$	2.47 (sun below)	-16.10°	$x = +12.60$ $y = -12.29$ $z = +2.57$