SOBRE O MÉTODO DAS DEPENDÊNCIAS

J.A. Salvador

ABSTRACT

In the present work, we are going to make an analysis, from a geometric point of view, of the dependence method used to calculate the position of celestial objects, through the vectorial analysis in the 3 - dimensional euclidean space.

INTRODUÇÃO

Na elaboração de efemérides e catálogos estelares, e para a determinação de órbitas é de grande importância o cálculo da posição de um objeto celeste. A astrometria moderna obteve um grande avanço graças aos instrumentos de observação, a utilização de técnicas fotográficas e aos métodos matemáticos de redução de posições.

Neste trabalho apresentaremos o método das dependências para calcular a posição de um objeto celeste, e para facilitar eventuais correções futuras, fazendo uma interpretação geométrica muito simples quando utilizamos três estrelas de referência e alguns conceitos de análise vetorial no espaço euclidiano tridimensional.

O método das dependências é bastante utilizado para determinar posições de novos asteróides, cometas e outros objetos celestes, uma vez registrados suas imagens numa placa fotográfica.

MÉTODOS DE REDUÇÃO

O domínio de observação dos objetos celestes é o conjunto de todos os pontos da esfera celeste e, desde que um objeto é observado ele é representado por um elemento (α_i, δ_i) deste conjunto, que são as coordenadas equatoriais celestes, ascensão reta e declinação respectivamente.

É conveniente introduzir dois conjuntos auxiliares, o conjunto das coordenadas retilíneas celestes, tradicionalmente conhecidas como coordenadas ideais ou standard, cujos elementos também são pares ordenados (X_i, Y_i) do plano tangente à esfera celeste na direção da observação e o conjunto das coordenadas retilíneas medidas (x_i, y_i) na placa fotográfica.

Os métodos de redução da posição de um objeto celeste através das placas fotográficas estabelecem uma correspondência biunívoca entre estres dois conjuntos auxiliares, ou seja, entre a placa fotográfica e o plano tangente à esfera celeste. Tal correspondência é determinada por meio das coordenadas retilíneas celestes de um certo número de estrelas de referência, identificadas na placa, quando comparadas com um catálogo e portanto são conhecidas as suas coordenadas equatoriais celestes, e as suas coordenadas retilíneas são medidas na placa.

Mesmo que a posição real do objeto celeste esteja submetida às influências de diferentes fatores instrumentais, óticos ou mecânicos, as fórmulas desta transformação biunívoca devem considerá-los, permitindo determinar as coordenadas retilíneas celestes a partir das coordenadas retilíneas medidas, e em seguida, a partir delas e das fórmulas da trigonometria esférica, podemos obter as coordenadas equatoriais celestes desejadas do objeto.

Sendo f a focal do instrumento de observação temos;

$$x_i = f\,X_i$$
$$y_i = f\,Y_i\ ,\quad i = 1,2,\ldots,n \qquad (2.1)$$

Além disso, usando as fórmulas fundamentais da trigonometria esférica como em DEBEHOGNE [2], obtemos:

$$X_i = \Delta\alpha_i \cos\delta_0 - \Delta\alpha_i\,\Delta\delta_i \operatorname{sen}\delta_0$$
$$Y_i = \Delta\delta_i + \frac{(\Delta\alpha_i)^2}{2}\operatorname{sen}\delta_0\cos\delta_0 \qquad (2.2)$$

onde (α_0,δ_0) é o ponto de tangência da projeção da placa sobre a esfera celeste e,

$$\Delta\alpha_i = \alpha_i - \alpha_0$$
$$\Delta\delta_i = \delta_i - \delta_0 \qquad (2.3)$$

são ss incrementos infinitesimais das estrelas consideradas relativos a (α_0,δ_0).

MÉTODO DAS DEPENDÊNCIAS

O astrônomo norte-americano SCHLESINGER elaborou o método das dependências para calcular a posição de um objeto celeste em coordenadas equatoriais celestes (α,δ) uma vez obtida as suas coordenadas retilíneas medidas (x_0, y_0) numa placa fotográfica, e em seguida muitos astrônomos o aperfeiçoaram.

SCHLESINGER mostrou que a posição desconhecida (x_0, y_0) de um objeto celeste pode ser reduzida como uma função linear explicita das coordenadas retilíneas medidas (x_i, y_i) das $n \geq 3$ estrelas de referência, isto é;

$$x_0 = \Sigma D_i x_i$$
$$y_0 = \Sigma D_i y_i \ , \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{3.1}$$

com a condição de que

$$1 = \Sigma D_i \ , \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{3.2}$$

Além disso, se $n>3$ as dependências D_i são tais que a função F definida por:

$$F(D_i, D_2, \ldots, D_n) = \Sigma D_i^2 \tag{3.3}$$

seja mínima.

Empregando o método dos multiplicadores de LAGRANGE, para encontrar o mínimo de (3.3) sujeita às condições (3.1) e (3.2), como em |3|, obtemos as dependências:

$$D_i = \lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i + \lambda_3 \ , \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{3.4}$$

onde λ_1, λ_2 e λ_3 são constantes que podem ser calculadas usando (3.1) e (3.2), isto é, resolvendo o sistema matricial

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i y_i & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i y_i & \Sigma y_i^2 & \Sigma y_i \\ \Sigma x_i & \Sigma y_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Evidentemente tal sistema de equações apresenta uma única solução pois a matriz dos coeficientes é não singular, além de ser simétrica, assim obtemos os valores das dependências.

Por outro lado, sabemos que a placa subentende uma pequena região da esfera celeste de modo que o desenvolvimento em série de TAYLOR das funções seno e co-seno em torno da origem até os termos de segunda ordem, das quantidades infinitesimais definidas em (2.3) nos dá:

$$\begin{aligned} \text{sen } \Delta\alpha_i &= \Delta\alpha_i + \sigma|(\Delta\alpha_i)^3| \\ \cos \Delta\alpha_i &= 1 - \frac{(\Delta\alpha_i)^2}{2} + \sigma|(\Delta\alpha_i)^4| \end{aligned} \qquad (3.6)$$

Usando (2.1) e (2.2) como em DEBEHOGNE |2| obtemos:

$$\begin{aligned} {}_i &= f(\Delta\alpha_i \cos \delta_0 - \Delta\alpha_i\ \Delta\delta_i \text{ sen } \delta_0) \\ y_i &= f(\Delta\delta_i + \frac{(\Delta\alpha_i)^2}{2} \text{ sen } \delta_0 \cos \delta_0) \end{aligned} \qquad (3.7)$$

que multiplicadas pelas respectivas dependências e somando desde 1 até n, nos dá:

$$\begin{aligned} \Sigma D_i x_i &= f(\Sigma D_i\ \Delta\alpha_i \cos \delta_0 - \Sigma D_i\ \Delta\alpha_i\ \Delta\delta_i \text{ sen } \delta_0) \\ \Sigma D_i y_i &= f(\Sigma D_i\ \Delta\delta_i + \Sigma D_i \frac{(\Delta\alpha_i)^2}{2} \text{ sen } \delta_0 \cos \delta_0) \end{aligned} \qquad (3.8)$$

Mas por (3.1) o primeiro membro das equações (3.8) representa as coordenadas do objeto celeste (x_0, y_0) que geralmente são consideradas como o centro das dependências e as coordenadas retilíneas das estrelas são medidas com relação à esta origem, assim, utilizando (3.2) temos para tal objeto:

$$\begin{aligned} 0 &= f(\Delta\alpha \cos \delta_0 - \Delta\alpha\ \Delta\delta \text{ sen } \delta_0) \\ 0 &= f(\Delta\delta + \frac{(\Delta\alpha)^2}{2} \text{ sen } \delta_0 \cos \delta_0) \end{aligned} \qquad (3.9)$$

Comparando (3.8) e (3.9), eliminando f temos:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \Sigma D_i\ \Delta\alpha_i - (\Sigma D_i\ \Delta\alpha_i\ \Delta\delta_i - \Delta\alpha\ \Delta\delta) \text{tg } \delta_0 \\ \Delta\delta &= \Sigma D_i\ \Delta\delta_i + \frac{1}{4}(\Sigma D_i (\Delta\alpha_i)^2 - (\Delta\alpha)^2) \text{sen } 2\delta_0 \end{aligned} \qquad (3.10)$$

Observamos que para estas fórmulas serem utilizadas na prática elas precisam ser coerentemente dimensionadas. Como o primeiro membro de (3.10) em ascensão reta deve ser expresso em segundo de tempo devemos multiplicar o último fator do segundo membro por sen 1", enquanto que o primeiro membro em declinação deve ser expresso em segundos de arco devemos multiplicar o último fator do segundo membro por 15^2 sen 1", assim obteremos:

$$\alpha = \alpha_0 + \Sigma D_i \, \Delta\alpha_i - \text{sen } 1''\text{tg}\,\delta_0(\Sigma D_i \, \Delta\alpha_i \, \Delta\delta_i - \Delta\alpha \, \Delta\delta)$$
$$\delta = \delta_0 + \Sigma D_i \, \Delta\delta_i + \frac{225}{4} \text{ sen } 1''\text{sen } 2\delta_0(\Sigma D_i(\Delta\alpha_i)^2 - (\Delta\alpha)^2) \qquad (3.11)$$

que são as coordenadas equatoriais celestes do objeto.

Geralmente considera-se (α_0, δ_0) como sendo as coordenadas de uma primeira estrela de referência porque é praticamente impossível saber o ponto de tangência da projeção da placa sobre a esfera celeste, e aí efetuamos as medidas de três ou mais estrelas de referência e do objeto celeste em relação à (α_1, δ_1) considerada como origem das coordenadas.

Desprezando os termos quadráticos podemos ter uma primeira aproximação para (α, δ) que é;

$$\alpha = \alpha_0 + \Sigma D_i \, \Delta\alpha_i$$
$$\delta = \delta_0 + \Sigma D_i \, \Delta\delta_i \qquad (3.12)$$

e que na prática pode ser usada como indicação da posição aproximada de um objeto celeste recém descoberto, e em seguida com mais cuidado calcular uma melhor aproximação juntamente com (3.11) pelo processo iterativo.

O MÉTODO PARA TRÊS ESTRELAS DE REFERÊNCIA

Quando aplicamos o método das dependências usando três estrelas de referência podemos obter a posição do objeto celeste relativamente rápido sem o uso do computador.

É natural escolher as estrelas de referência na placa fotográfica de modo que o objeto celeste fique no interior do triângulo cujos vértices são as suas imagens, e o centro das dependências (0,0) coincide com as coordenadas retilíneas (x_0, y_0) do objeto celeste.

Resolvendo o sistema (3.1) e (3.2), isto é;

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

obtemos a solução pelo método de CRAMER;

$$D_i = \frac{n_i}{N}, \quad i = 1,2,3 \tag{4.2}$$

onde os valores n_i, $i=1,2,2$ são os menores complementares da terceira linha e N é o determinante da matriz dos coeficientes do sistema (4.1), que obviamente é não nulo.

INTERPRETAÇÃO

Quando aplicamos o método das dependências utilizando três estrelas de referência, escolhidas de modo que a imagem do objeto celeste jaz no interior do triângulo constituído pelas suas imagens na placa fotográfica, obtemos uma interpretação geométrica bastante simples e clara utilizando alguns conceitos de análise vetorial.

Fixando a imagem do objeto celeste como origem das coordenadas medidas, os vértices de tal triângulo constitui os vetores $(x_i, y_i, 0)$, $i=1,2,3$. Reparemos que as imagens das estrelas de referência na placa estão num plano, e para dar um tratamento vetorial mais elegante introduzimos uma terceira componente nula, obtendo assim um vetor num sub-espaço do espaço vetorial euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$.

Definimos agora os vetores $\vec{n}_i$ pelo produto vetorial dos vetores $(x_j, y_j, 0)$ e $(x_k, y_k, 0)$, isto é;

$$\vec{n}_i = (x_j, y_j, 0) \times (x_k, y_k, 0) \tag{5.1}$$

onde i, j e k são números inteiros que variam ciclicamente de 1 a 3, sendo $\vec{n}_i$ normal aos vetores $(x_j, y_j, 0)$ e $(x_k, y_k, 0)$, ou seja, $\vec{n}_i$ é perpendicular à placa fotográfica.

Temos assim que os vetores $(x_j, y_j, 0)$, $(x_k, y_k, 0)$ e $\vec{n}_i$ são linearmente independentes, logo eles geram o espaço todo $\mathbb{R}^3$.

Observamos que o valor absoluto do vetor $\vec{n}_i$ é exatamente n_i definido em (4.2), isto é;

$$|\vec{n}_i| = n_i = x_j y_k - x_k y_j \tag{5.2}$$

Sabemos que o valor absoluto do vetor $\vec{n}_i$ representa geometricamente a área do paralelogramo cujos lados são os vetores $(x_j, y_j, 0)$ e $(x_k, y_k, 0)$, que é o dobro da área do triângulo de vértices $(0,0,0)$, $(x_j, y_j, 0)$ e $(x_k, y_k, 0)$ como podemos visualizar na figura (5.1).

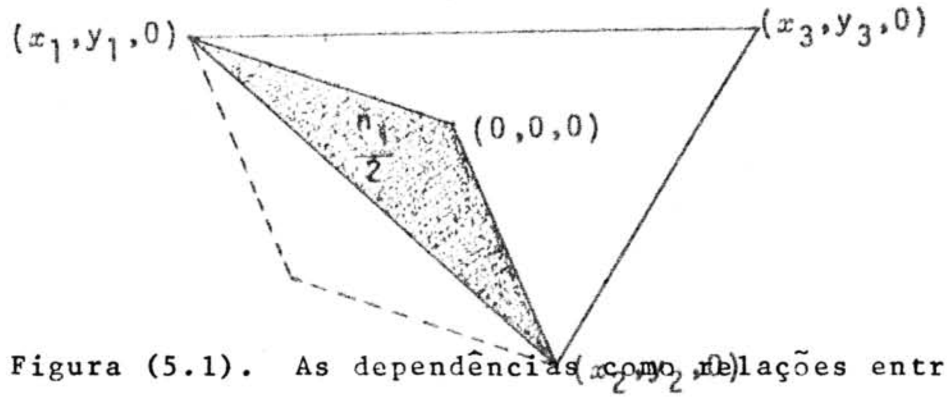

Figura (5.1). As dependências como relações entre áreas.

Além disso, podemos definir o vetor $\vec{n}$ como:

$$\vec{n} = (n_1 + n_2 + n_3)\,\vec{k}$$

onde $\vec{k}$ é o vetor unitário também perpendicular à placa, e o valor absoluto de $\vec{n}$ é igualmente a N definido em (4.2).

Assim, N representa geometricamente o dobro da área do triângulo formado pelas três estrelas de referência.

Sendo n_i a área do paralelogramo, como na figura (5.1), $\frac{n_i}{2}$ é a área do triângulo correspondente a sua metade, que é igual $\frac{1}{2} b_i h_i$ onde b_i é a base e h_i é a altura deste triângulo relativa ao vértice $(0,0,0)$.

Por outro lado $\frac{N}{2}$ representa a área do triângulo cujos vértices são as três estrelas de referência que também pode ser escrita como $\frac{1}{2} b_i H_i$, onde H_i é a altura de tal triângulo relativa à base b_i.

De (4.2) segue-se que as dependências D_i, podem ser expressas como:

$$D_i = \frac{h_i}{H_i}\ , \quad i = 1, 2, 3.$$

Logo podemos visualizar as dependências como relações entre comprimentos, como mostra a figura (5.2).

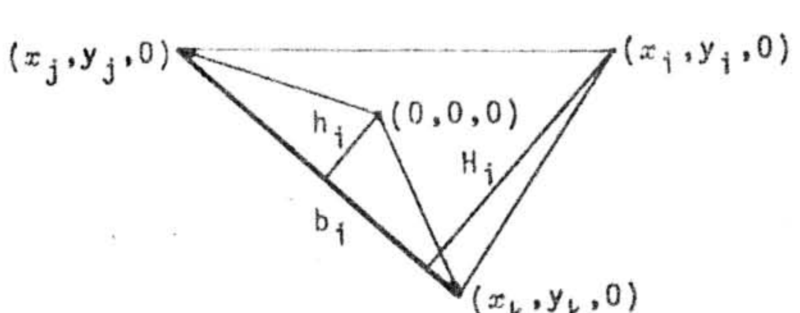

Figura (5.2). As dependências como relações entre comprimentos.

As dependências D_i, $i = 1,2,3$ podem ser consideradas como relações entre as áreas dos triângulos como na figura (5.1) ou simplesmente como relações entre os comprimentos das alturas dos triângulos como na figura (5.2). De qualquer modo notamos que elas são quantidades adimensionais, e portanto não há necessidade da orientação da placa fotográfica no instrumento de observação nem da determinação da escala da placa.

CONCLUSÃO

A escolha de três estrelas de referência tem uma grande vantagem que é a rapidez com que podemos medir as dependências D_i, $i = 1,2,3$ na placa fotográfica com uma régua fina cujas graduações devem ser precisas. Para isto é necessário que o astrometra construa o triângulo das estrelas de referência e faça simplesmente as medidas das alturas h_i e H_i, $i = 1,2,3$, e os seus respectivos quocientes.

Em seguida é só aplicar as fórmulas (3.12) e obter uma primeira aproximação para as coordenadas celestes desejada do objeto.

Quando aplicamos o método das dependências a um número $n>3$ estrelas de referência é necessário o uso de um medidor de placas e de um computador, o que provavelmente levaria mais tempo para obter uma melhor aproximação para a posição de um objeto celeste que fosse descoberto, principalmente num observatório modesto que às vezes não se tem todo este equipamento.

O método das dependências é bastante utilizado para calcular as posições de asteróide como em |4|, e de outros objetos celestes como em |2|.

A equipe de pesquisadores na área de Astrometria do Observatório do Valongo tem utilizado tal método para calcular as posições dos novos asteróides descobertos em operação conjunta com o astrônomo belga DEBEHOGNE nas chapas fotográficas obtidas no Observatório Europeu Austral, em La Silla no Chile.

Finalmente, queremos expressar os nossos agradecimentos ao Prof. Dr. HENRY DEBEHOGNE por seus ensinamentos sobre astrometria, ao Prof. Dr. LUIZ EDUARDO DA SILVA MACHADO, diretor do Observatório do Valongo pelas valiosas sugestões, à sua equipe de astrônomos e a todos os amigos do Instituto de Matemática da UFRJ que sempre nos incentivaram.

BIBLIOGRAFIA

DEBEHOGNE, H., Redution des positions photografique d'objects célestes. Discussion de diverses méthods, ORB, série B (1968).

DEBEHOGNE, H., Cours à L'Université Federale du Rio de Janeiro (1977).

MARSDEW, J.E., TROMBA, A.J., Vector Calculus, W.H. Freeman and Company, San Francisco (1976).

SALVADOR, J.A., Cálculo da Posição de Asteróides, Observatório do Valongo (1979).

SCHLESINGER, F., A short method for deriving positions of asteroids, comets, etc., from photographs, The astronomical journal 874, vol. XXXVII (1926).