Wittgenstein e o problema da consistência da aritmética

Anderson Nakano
USP

1. Introdução

Em um interessante artigo, Pereira (2013) procura construir uma espécie de diálogo imaginário entre Waismann e Wittgenstein sobre questões que circundam o famigerado programa de Hilbert de fundamentação da aritmética. O objetivo deste exercício de literatura fantástica foi, segundo as palavras do autor, "tentar mostrar que algumas observações de Wittgenstein não podem ser aceitas sem uma elaboração maior". Em certos momentos, afirma Pereira, "é quase irresistível não atribuir a Wittgenstein um certo desconhecimento técnico". O artigo não pretende, na verdade, criticar a posição de Wittgenstein em relação a estas questões, mas apenas, "através da voz de um Waismann fictício, pedir algumas explicações e esclarecimentos" (PEREIRA, 2013, p. 288).

Procuro fornecer, neste artigo, algumas respostas às questões colocadas por Pereira. Estas respostas vão se basear – e esse é um ponto que julgo ser de grande interesse para uma avaliação da posição de Wittgenstein – em uma *única* ideia fundamental, a saber, a de que *não há atalhos pela lógica*. Isto é, vou partir de um "*Grundgedanke*" para reconstituir, sobre este alicerce, as respostas de Wittgenstein às questões de Waismann, bem como fornecer algumas respostas possíveis ao Waismann fictício de Pereira. Não será fornecida, a bem da verdade, uma lista de perguntas e respostas, mas estas surgirão no decorrer do desenvolvimento da ideia fundamental. O artigo

ANALYTICA
volume 21
número 1
2017

terá tanto mais êxito quanto conseguir reunir as observações de Wittgenstein sobre a matemática em torno desta ideia. Será possível ver, a partir disso, em que medida estas respostas são capazes de jogar uma luz nos comentários de Wittgenstein (à época das discussões com Waismann e com o círculo de Viena) sobre o problema da consistência da aritmética.

Antes de iniciar a tarefa, contudo, é preciso ser dito que as observações de Wittgenstein sobre o tema da consistência de sistemas formais não são lá muito populares, e já engendraram diversas críticas às suas ideias, sobretudo quando se considera os diálogos com Turing durante o curso de 1939 (WITTGENSTEIN, 1976) e os comentários sobre os resultados de Gödel no Apêndice III à parte I das *Observações sobre os fundamentos da matemática* (WITTGENSTEIN, 1978). A título de exemplo, Marcos alega que o ponto de vista de Wittgenstein culmina "num grande engano na interpretação (...) das demonstrações de consistência relativa, e na completa incapacidade de entender o funcionamento do Segundo Teorema de Gödel", sem mencionar o "completo mal-entendido em relação ao significado do Primeiro Teorema de Gödel" (MARCOS, 2010, p. 137). Esse diagnóstico está longe de ser o do artigo de Pereira que pede, antes de mais nada, uma elucidação das ressalvas de Wittgenstein quanto ao significado de teoremas metalógicos. Um trabalho, portanto, que elaborasse e explicitasse as observações de Wittgenstein seria de interesse tanto para se ter uma noção precisa de sua posição quanto para se julgar o mérito das críticas a ela.

Pereira divide os questionamentos de Waismann em sete, e menciona que seu artigo trata apenas da primeira, ainda que toque de maneira breve em outras das questões. A primeira questão é a seguinte:

> Por que seríamos impedidos de fazer perguntas sobre um sistema de axiomas ou sobre um cálculo? Por que não faria sentido fazer perguntas sobre um sistema de axiomas? E os resultados de independência? E os resultados de completude/incompletude, e de decidibilidade/indecidibilidade? Afinal de contas, perguntas e considerações *sobre* um sistema de axiomas parecem fazer sentido, parecem ser significativas e mesmo importantes. Resultados e considerações sobre a derivabilidade e a não derivabilidade em um sistema de axiomas parecem conter informações muito relevantes e importantes sobre o alcance do próprio sistema, e um resultado sobre a consistência é um resultado sobre a não derivabilidade. Não são esses *insights*/*descobertas* relevantes para o próprio uso do sistema e do cálculo? (PEREIRA, 2013, p. 280)

Em um primeiro momento, parece tentador simplesmente responder, mediante uma leitura das conversas que de fato aconteceram entre Wittgenstein e Waismann no início dos anos 30, que os comentários de Wittgenstein soam surpreendentes apenas quando não se leva em conta o significado preciso dado pelo autor a termos como "sentido", "sistema" e "pergunta". Consideremos, por exemplo, a noção de "pergunta". Não é muito difícil retirar, destas conversas com Waismann e o círculo de Viena, que Wittgenstein considerava uma pergunta (na lógica, na matemática) bem definida apenas quando há um *método* para respondê-la. E há um método para responder uma pergunta apenas quando esta se encontra em um sistema. Portanto, só se pode falar *sobre* um sistema se este sistema está incluso em um sistema maior, se ele é um *sub-sistema* desse sistema. A resposta seria, é claro, decepcionante para o interlocutor. Seria como se alguém perguntasse: "Por que não posso alimentar um tigre com leite"? e obtivesse, como resposta: "Porque a palavra 'tigre', na minha língua, quer dizer 'girafa', e girafas não se alimentam de leite". Seria possível pensar, então, que as considerações de Wittgenstein não passam da mudança de um jargão para outro e que, se traduzidas para o vocabulário tradicional, nada sobraria de relevante.

É preciso mostrar, creio, que Wittgenstein tem algo importante a dizer mesmo se eliminarmos as diferenças vernaculares. Ainda assim, não se pode perder de vista que a adoção de um vocabulário peculiar não é apenas uma questão de preciosismo ou excentricidade. Wittgenstein acreditava que certas questões filosóficas só poderiam aparecer em uma linguagem pouco rigorosa, em uma linguagem dotada de equivocidade e vagueza. Quando Pereira pergunta no artigo supracitado: "Qual é a fronteira real entre cálculo e prosa?" (ibid, p. 282), a resposta a ser dada é que *a prosa é o domínio da ambiguidade, ao passo que o cálculo é o domínio da univocidade*. E, para Wittgenstein, uma das questões que apenas surge em uma linguagem ambígua é a questão – dotada da dramaticidade costumeira aos problemas filosóficos – da consistência da aritmética.

Vale notar, de passagem, que Wittgenstein não está sozinho quando atribui um significado estrito à noção de *sentido* de uma proposição ou questão matemática. Também Gentzen, em seu artigo cuja pretensão é demonstrar a consistência da aritmética (GENTZEN, 1969, pp. 132-213), vai dizer que certos conceitos adquirem sentido apenas quando são predicados de um objeto para o qual sua validade é simultaneamente provada (ibid, p. 195).[1] Em outras palavras,

1 O conceito referido por Gentzen é o de "acessibilidade", usado no teorema da indução transfinita.

ANALYTICA
volume 21
número 1
2017

a proposição matemática que afirma que este objeto cai sob aquele conceito apenas adquire sentido uma vez que sua prova é dada. Isto ocorre quando não há um procedimento efetivo para decidir se o conceito vale para um certo objeto, ainda que seja possível definir o conceito de tal forma que ele *construa um a um* os objetos que sob ele caem. Um exemplo é o conceito de "demonstrabilidade" e seu uso na questão "a fórmula '$p\wedge\neg p$' é demonstrável neste sistema formal?". Reconhece-se, portanto, ao fim do artigo de Gentzen, que a questão que ele procura responder com a sua prova só possui sentido após a sua resposta ter sido fornecida. Mais uma vez, pode-se ter a impressão de que esta é uma forma bizarra de se apresentar os conceitos lógicos de decidibilidade e semidecidibilidade. O que é preciso mostrar, então, é que, para além dessa diferença de jargão, há algo interessante a ser dito do ponto de vista da filosofia de Wittgenstein, tarefa que inicio pela apresentação daquilo que chamei de sua ideia fundamental.

2. O caso da soma de Gauss

Reza a lenda que Gauss, aos nove anos de idade, surpreendeu seu professor pela rapidez com que fizera a tarefa por ele demandada a seus alunos. A tarefa era clara: computar a soma dos 100 primeiros números naturais. Enquanto o restante da classe estava ainda na primeira dezena de somas, Gauss levantou-se, dirigiu-se até a mesa do mestre, e disse: "*Ligget se!*" ("Eis a resposta!"), na mesma hora em que entregava-lhe um pedaço de papel com o numeral 5050. A impressão que se tem dessa história é que Gauss teria feito a tarefa solicitada, mas feito de uma maneira "mais astuta" que a maneira tradicional. Com efeito, Gauss teria supostamente escrito, um sob o outro, o primeiro e o último número a serem somados, em seguida o segundo e o penúltimo número, e assim por diante:

1	2	3	...	50
100	99	98	...	51

e notado que, em cada coluna, a soma era 101. Havendo 50 colunas com a mesma soma, bastava multiplicar a soma de cada coluna pelo número de colunas para se obter o resultado desejado. Evidentemente, o "truque" de Gauss em nada dependia de a soma a ser executada ser a dos *cem* primeiros números, e a generalização dessa ideia resulta na seguinte fórmula:

ANALYTICA
volume 21
número 1
2017

$$1+\ldots+n = (n+1)\,\frac{n}{2}$$

Façamos agora a seguinte indagação: Gauss realmente *resolveu* a tarefa posta pelo seu professor, se a tarefa consistia em somar, um a um, os cem primeiros números naturais? Pois uma coisa é clara: havia uma certa técnica de soma dos cem primeiros naturais, e Gauss não a aplicou. Como é possível que Gauss, tendo aplicado *outra* técnica, tenha chegado ao *mesmo* resultado? E neste ponto gostaríamos de introduzir a ideia fundamental de Wittgenstein: a de que, *na lógica e na matemática, processo e resultado são equivalentes* ou, em outras palavras, a de que *não há atalhos pela lógica*. Segundo este princípio, não se pode dizer que Gauss descobriu uma nova técnica que fornece o *mesmo* resultado que a antiga, pois *o resultado é parte não segmentável da técnica*. Para marcar essa diferença entre técnicas e agregá-las ao resultado, passaremos a usar um índice anexado ao sinal"=", de acordo com a técnica aplicada (T: tradicional; G: Gauss). Obtemos, então, o seguinte par de equações:

$$1+\ldots+100 =_T 5050 \text{ e } 1+\ldots+100 =_G 5050$$

Notemos agora que, ainda que alguém tenha se equivocado ao aplicar a técnica tradicional e tenha chegado ao resultado $1+\ldots+100 =_T 5048$ e daí deduzido que $1+\ldots+100 \neq_T 5050$, este resultado não seria conflitante com $1+\ldots+100 =_G 5050$, isto é, o produto lógico destas duas equações não resultaria numa contradição. Notemos também que, se a questão colocada pelo professor de Gauss fosse escrita como $1+\ldots+100 =_T ?$ então Gauss não respondeu a questão que seu professor colocou, ao passo que se ela fosse escrita como $1+\ldots+100 =_T ?$, ela seria uma questão ambígua.

"Ora, se essa é a grande ideia de Wittgenstein, então ela é bastante tola e de fácil refutação". Vejamos, agora, o que se poderia objetar a essa ideia. Talvez se possa argumentar que o resultado de uma soma é simplesmente um número, um objeto ou uma estrutura que possui critérios de identificação independentemente dos diversos processos que podem engendrá-lo como resultado. Ainda que adotemos o ponto de vista de que é um certo processo que engendra um determinado número (digamos, a soma de unidades), é *este processo canônico o seu critério de identidade*. Isto não significa que ele sempre seja engendrado por meio desse processo canônico,

ANALYTICA
volume 21
número 1
2017

mas que se reconhece a possibilidade de escrevê-lo como o resultado desse processo canônico (e.g. a possibilidade de se escrever 10^{10} como (1 + (... (1 + (0 + 1))))).[2] Identificar processo e resultado, portanto, seria o mesmo que confundir definição e teorema. Além disso, que a técnica de Gauss obtenha o *mesmo* resultado que a técnica tradicional para *todos* os números não é uma mera coincidência, mas é algo passível de prova, a saber, uma prova indutiva. Prova-se, primeiramente, que as técnicas concordam para $n = 1$:

$$(1+1)\frac{1}{2} = 1;$$

supõe-se, posteriormente, que a concordância vale para um n arbitrário:

$$(n+1)\frac{n}{2} = 1+\ldots+n$$

e finalmente demonstra-se que o mesmo vale para o seu sucessor:

$$((n+1)+1)\ \frac{(n+1)}{2} = (n+2)\frac{(n+1)}{2} = (n+1)\frac{(n+2)}{2} = [(n+1)\frac{n}{2}]+[(n+1)\frac{2}{2}] = 1+\ldots+n+n+1 =$$

$$= 1+\ldots+n+1.$$

Isso mostra, diriam, que tanto faz qual técnica aplicar, pois o resultado será sempre o mesmo; é claro que a técnica de Gauss é preferida pois, enquanto a técnica tradicional necessita realizar n somas, a de Gauss requer apenas uma soma, uma multiplicação e uma divisão.[3]

Devemos discutir, portanto, duas coisas: a primeira é a ideia de que um número possui um critério de identificação independentemente do modo pelo qual ele é engendrado. A segunda é a ideia de que a prova indutiva demonstra a identidade entre o resultado da aplicação de duas técnicas. É ao exame dessas duas ideias que nos dedicaremos doravante. Todavia, ao invés de irmos direto a elas, ser-nos-á útil fazer um desvio e apresentar alguns pontos do texto que serve de pano de fundo para as discussões entre Waismann e Wittgenstein sobre o tema da consistência: a crítica de Frege a seus colegas formalistas.

2 Cf. Martin-Löf (1984, p. 7).

3 Este raciocínio depende, naturalmente, de como a multiplicação e a divisão são efetivamente computadas.

ANALYTICA
volume 21
número 1
2017

3. A crítica de Frege às teorias formais de Thomae e Heine

A terceira parte do segundo volume dos *Grundgesetze der Arithmetik* de Frege é destinada à construção dos números reais por meio do aparato lógico desenvolvido na primeira parte do livro. Ela é dividida em duas grandes Seções: i) §§55-164: crítica das teorias de diversos autores; ii)165ff construção de sua teoria das grandezas. Frege dedica os parágrafos 89-136, que correspondem à subseção (c) da primeira Seção, a uma extensa análise das apresentações da aritmética de Thomae e Heine, apresentações que identificam a aritmética a um *jogo com signos*.

Deste texto, que é parcialmente lido e discutido nas conversas de Wittgenstein com o círculo de Viena,[4] eu gostaria de pinçar cinco pontos que serão relevantes para uma correta apreciação destas conversas. Eles são:

i. *Para Frege, não há distinção fundamental entre as posições de Thomae e Heine*. Frege reconhece haver uma diferença apenas no modo de apresentação das teorias de Thomae e Heine. O último afirmava que os números eram os próprios signos tangíveis com os quais a aritmética trabalha, ao passo que o primeiro considerava os signos como meros"sinais externos" para o comportamento das "peças", comportamento regido, assim como no jogo de xadrez, por regras arbitrariamente estipuladas. Frege, porém, insiste em uma imprecisão no modo de expressão de Thomae, a fim de justificar o enquadramento de ambas as teorias em um mesmo *slogan*: a aritmética formal trata de signos. Frege contrapunha esta teoria formal a uma teoria conteudística (*inhaltliche)* da aritmética, segundo a qual os objetos da aritmética não são os signos, mas o que são por eles designados.

ii. *Em uma teoria conteudística, as regras não podem ser arbitrárias, pois elas se seguem do significado dos sinais*. Na seção §89, Frege apresenta duas motivações para se aderir a uma teoria formalista. A primeira é que não há mais a questão metafísica da existência dos números, já que, sendo sinais tangíveis, eles obviamente existem. A segunda é que não é mais preciso fornecer uma justificação para as regras do jogo: elas são arbitrárias. O contrário se passa em uma teoria conteudística, já que neste caso"as regras não poderiam ser tomadas arbitrariamente" (§91), mas "se seguiriam necessariamente do significado dos signos" (§158). Se o significado é considerado, assevera Frege,"as regras encontrariam *nisto* o seu fundamento" (§91).

4 Cf., em particular, Wittgenstein (1984, pp. 130-6; 150-2).

ANALYTICA
volume 21
número 1
2017

iii. *Deve-se distinguir cuidadosamente entre jogo e teoria do jogo*. Frege argumenta que, ainda que as regras de um jogo sejam arbitrárias, não é arbitrário o que se segue de um conjunto de regras arbitrariamente estipuladas. É assim possível que haja uma *teoria do jogo*, teoria cujas regras já não são mais arbitrárias, mas são as regras da lógica, regras de *inferência*. Frege também sublinha que causa confusão, na apresentação de Thomae e Heine, o duplo papel que as equações desempenham: enquanto configurações do jogo e enquanto regras do jogo. Uma equação como "2 + 1 = 1 + 2" é vista tanto como uma configuração do jogo quanto como uma regra que permite uma substituição. Segundo Frege, deve-se distinguir claramente ambos os papéis, e até mesmo usar diferentes sinais para a expressão de configurações e regras. Uma vez feita esta distinção, nenhuma configuração de peças em um jogo *expressa* uma regra do jogo; ao invés disso, estas peças são *movidas* de acordo com as regras.

iv. *Configurações de um jogo não expressam, em sentido estrito, contradições*. Na aritmética formal pode haver, é verdade, contradições (*Widerspruch*), ou melhor, conflitos (*Widerstreit*) entre as *regras* do jogo, mas por que deveríamos chamar uma *configuração* como "3 = 4" de uma contradição? (§117) Por que a configuração "3 = 4" seria conflitante com a configuração "3 ≠ 4"? Isso ocorre apenas se confundirmos configurações e regras e se lermos, na equação, uma permissão de substituição e na inequação, uma proibição desta mesma substituição. No curso de sua crítica à posição formalista, Frege faz notar que, uma vez desfeita essa confusão, percebe-se que nenhuma configuração pode ser chamada, em sentido estrito, de contradição, do mesmo modo que seria arbitrário chamar de contradição uma configuração qualquer do jogo de xadrez.

v. *A apresentação de Heine envolve essencialmente ambiguidade*. Para Frege, uma apresentação como a de Heine só é possível na base de uma ambiguidade entre noções-chave como a de "signo" e "referência" (§98). Quando este é o caso, o método para criticar tal teoria deve consistir meramente na sua elucidação, deve consistir em *levar a sério* a teoria. Nenhuma crítica externa a ela parece ser possível, já que toda crítica poderia ser em princípio evitada apelando-se para estas noções obscuras, noções que, precisamente por serem ambíguas, fornecem uma margem de manobra para evasão à crítica.

A partir destes cinco pontos, é possível ver, de maneira mais sistemática, a recepção da obra de Frege por parte de Wittgenstein em suas conversas com Waismann. Com isso, também

ANALYTICA
volume 21
número 1
2017

chegaremos mais perto de fornecer um diagnóstico da posição de Wittgenstein, à época dessas conversas, sobre o problema da consistência da aritmética, antes de voltarmo-nos para as duas questões colocadas na segunda Seção deste artigo.

4. Wittgenstein e Frege

Começo pelo quinto ponto. Já havia mencionado anteriormente que, para Wittgenstein, certas questões filosóficas só poderiam aparecer em uma linguagem dotada de equivocidade e vagueza. Esta é uma herança de Frege em seu pensamento. E essa herança se faz presente na distinção entre *cálculo* e *prosa*. A prosa é o lugar do discurso em que as mesmas palavras são utilizadas com sentidos distintos. A prosa é, portanto, *sofística*. Uma crítica à prosa matemática só pode consistir, por conseguinte, em uma análise de seu significado exato. A pergunta pela consistência da aritmética, para Wittgenstein, pertencia não ao domínio do *cálculo* (como pensava Hilbert e seus seguidores), mas ao domínio da prosa. Uma vez feita a distinção entre cálculo e prosa, acreditava Wittgenstein, "todas essas questões sobre a consistência, independência, etc. desapareceriam" (WITTGENSTEIN, 1984, p. 149).

Por outro lado, Wittgenstein vai acusar Frege de não ter sido suficientemente preciso em sua caracterização da aritmética formal, e a própria crítica de Frege é reprochável nesse sentido. E, aqui, entro no primeiro ponto destacado na Seção anterior. Para Wittgenstein, não há uma dicotomia entre aritmética conteudística e aritmética formal, tal como caracterizada por Frege. Há um terceiro que foi injustamente excluído. Waismann explicita esta posição do seguinte modo:

> Para Frege, as alternativas eram: ou um sinal possui um significado, i.e., ele substitui um objeto – o sinal lógico o objeto lógico, o sinal aritmético o objeto aritmético – ou ele é apenas uma figura pintada com tinta sobre o papel.
>
> Mas isto não está correto. Há, como o jogo de xadrez já indica, uma terceira opção. O peão no jogo de xadrez nem possui um significado, no sentido em que ele substitui algo, em que ele é sinal *para* algo, nem é meramente uma figura esculpida na madeira que é empurrada em um tabuleiro de madeira. Determina-se o que um peão é apenas pelas regras do jogo de xadrez.

ANALYTICA
volume 21
número 1
2017

> Este exemplo mostra que não deveríamos dizer: um sinal ou é um sinal para algo, ou é apenas uma estrutura perceptível aos sentidos. Algo no formalismo está correto, e Frege não viu este núcleo correto.
>
> O "significado" do peão é, como se queira, a totalidade das regras que para ele valem. E assim pode-se também dizer: o significado de um numeral é a totalidade das regras que valem para ele. (ibid, p. 150, tradução nossa)

Dito de outro modo, para Frege a aritmética era ou teoria de objetos abstratos, denotados por signos numéricos, ou teoria dos próprios signos numéricos. Frege parece excluir a possibilidade de que a aritmética não seja uma *teoria*, mas uma *atividade regrada*, uma atividade composta de *múltiplas técnicas*.

Em relação ao quarto ponto, Wittgenstein concorda com Frege em que a comparação da aritmética com um jogo torna claro o fato de que uma fórmula como "0≠0" é tão pouco uma contradição quanto uma configuração qualquer de peças do jogo de xadrez o é[5]. A acusação de que a presença de tal "contradição" torna o jogo trivial (capaz de demonstrar qualquer fórmula) e, portanto, "desinteressante", será analisada posteriormente. Aqui, o que importa guardar é que apenas no âmbito das regras é possível haver, em sentido estrito, *contradições*. A contradição ocorre quando há tanto uma regra que permite determinado movimento quanto uma regra que proíbe o mesmo movimento. O que ocorre, neste caso, é que não se sabe o que fazer: a ação, no interior do jogo, torna-se incerta. Seria esse movimento permitido ou proibido? Na ausência de uma *decisão* sobre essa incerteza, o jogo não pode prosseguir. Neste registro, uma *contradição escondida* não é de modo algum danosa. O raciocínio é o seguinte: se o resultado líquido de um conflito entre as regras é o impedimento de se prosseguir no jogo, na medida em que se *prossegue* no jogo não há nenhum conflito entre as regras. Se uma contradição nas regras é posteriormente "trazida à tona", o que ocorreu anteriormente pode ser visto como uma *decisão tácita* de se priorizar uma regra em detrimento de outra. E o que ocorre se, a partir deste instante, decide-se priorizar a regra oposta? Ocorre simplesmente que, anteriormente a esta decisão, um *outro* jogo estava sendo jogado, um jogo com regras distintas.

5 Claro que, ao dizer isso, Frege procurava atacar o formalismo de Thomae e Heine, ao passo que Wittgenstein utiliza este raciocínio de Frege para denunciar a aplicação da palavra "contradição" a configurações de um jogo.

ANALYTICA
volume 21
número 1
2017

A objeção imediata a este raciocínio – e que constitui o segundo dos cinco pontos acima mencionados – é que nem todo jogo com numerais seria chamado de *aritmética*. As decisões a serem tomadas quando ocorre um conflito entre regras devem ser justificadas pela *estrutura* da série numérica, e o que ocorre quando as regras são conflitantes é que uma delas é *incorreta* nesta estrutura. Uma regra que permitisse a derivação da equação "2 + 2 = 5" seria uma destas regras. A aritmética não é um mero jogo com signos, já que uma decisão a respeito das regras pode ser tomada com base nessa estrutura subjacente. Ainda que se considere, equivocadamente, que a aritmética é um jogo, haveria sobre esse jogo uma *teoria do jogo* (terceiro ponto acima), na medida em que todo jogo define uma estrutura (possibilidades e impossibilidades de configurações de suas peças), e as regras de tal teoria do jogo deveriam *espelhar* essa estrutura. Se a minha teoria permite, p. ex., a derivação da sentença "Um bispo que repousa sobre uma casa branca pode alcançar uma casa preta", então essa teoria não é sobre o jogo de xadrez.

A força de tal objeção consiste no fato de ela poder se embasar naquilo que o próprio Wittgenstein diz acerca da lógica no *Tractatus Logico-Philosophicus*, a saber, que ela é uma *imagem especular do mundo* (WITTGENSTEIN, 1993, p. 261, aforismo 6.13). O cálculo lógico não pode ser inteiramente arbitrário, mas deve espelhar as propriedades lógicas (internas) das proposições com as quais ele opera. Um jogo, portanto, que permitisse "derivar", a partir de tautologias, uma fórmula da forma '$p \wedge \neg p$' não seria visto como um cálculo *lógico*, e tal derivação não seria tomada por uma demonstração *na lógica*. De maneira similar, um jogo que permitisse derivar a equação "20 + 30 = 53" não poderia ser considerado um cálculo *aritmético*. A Seção seguinte busca analisar essa aparente contradição interna da posição de Wittgenstein ou, ao menos, essa tensão entre o *Tractatus* e as observações do período intermediário de seu pensamento sobre a matemática.

5. A radicalização da ideia fundamental

Uma análise das observações de Wittgenstein sobre a matemática em seu período intermediário parece poder se beneficiar daquilo que é uma questão de estilo de seu pensamento, a saber, o fato de muito do que o autor do *Tractatus* escreve posteriormente poder ser lido como uma crítica ou como uma discussão aprofundada do "conteúdo" dos aforismos do *Tractatus*. A crítica à preocupação com contradições escondidas na matemática, por exemplo, parece ser

ANALYTICA
volume 21
número 1
2017

tributária da crítica a uma ideia tractariana: a ideia de uma *função de verdade escondida*, passível de ser revelada pela análise lógica. Tomemos, por exemplo, a proposição "Isto é vermelho e isto é verde". Ora, se isto é uma contradição, diria o autor do *Tractatus*, então a análise lógica *revelaria* tal contradição por meio do fato de que ao menos um dos dois componentes da conjunção acima *conteria*, em seu sentido, a negação do outro componente. Ao se escrever, portanto, ambas as proposições na notação das tabelas de verdade, ver-se-ia que todas as linhas da tabela que verificam um dos componentes também falsificam o outro componente. A regra de inferência que nos permite passar de "Isto é vermelho" para "Isto não é verde" poderia ser *extraída* de uma notação canônica para ambas as proposições, a saber, da notação por meio de tabelas de verdade.[6]

No início dos anos 30, Wittgenstein vai abandonar o postulado de uma *notação lógica privilegiada*, notação da qual as regras de inferência pudessem ser decalcadas. No contexto dessa crítica, ele vai dizer que as proposições "Isto é vermelho" e "Isto é verde" não se *contradizem* enquanto não houver uma regra explícita que proíbe considerar ambas as proposições como verdadeiras.[7] No *Tractatus*, tudo se passa como se as regras de inferência – no caso de proposições – e sintáticas – no caso dos termos – pudessem ser *extraídas* de uma notação perfeita, como se essa notação *contivesse* a gramática de modo latente. Já em seu período intermediário, Wittgenstein vai defender a ideia de que a gramática é transparente e que não há nada oculto para ser trazido à luz no que tange às regras gramaticais.

É importante precisar, neste ponto, que a tese fregiana segundo a qual regras se seguem do significado das palavras e sentenças da linguagem não se aplica imediatamente ao *Tractatus*. Isso porque essa ideia era justamente denunciada como sendo o erro da teoria dos tipos de Russell:

> Na sintaxe lógica, o significado de um sinal nunca pode desempenhar papel algum: ela deve poder estabelecer-se sem que se fale do *significado* de qualquer sinal, ela pode pressupor *apenas* a descrição das expressões.
>
> Partindo dessa observação, inspecionamos a "Theory of Types" de Russell: o erro de Russell

6 É claro que a existência de uma infinidade de proposições elementares torna esse raciocínio bastante problemático, mas este é um outro problema.

7 Cf. Wittgenstein (1984, p. 127 e p. 149).

ANALYTICA
volume 21
número 1
2017

> revela-se no fato de ter precisado falar do significado dos sinais ao estabelecer as regras notacionais. (WITTGENSTEIN, 1993, p. 159, aforismos 3.33-3.331)

Entretanto, havia no *Tractatus* um compromisso com a existência (ou, ao menos, a possibilidade) de uma notação que obedecesse à gramática *lógica*,[8] uma notação que, apesar de possuir a mesma "multiplicidade" da linguagem ordinária (que é, a propósito, inteiramente legítima), fosse capaz de exibir, em sua superfície, a forma lógica daquilo que ela representa. Uma notação, portanto, em que a distância entre *sinal* e *símbolo* fosse a menor possível. É verdade que, para o *Tractatus*, a linguagem ordinária em nada deve, em termos expressivos, a essa linguagem "logicamente analisada", mas, para isso, a gramática da linguagem ordinária deve ser imensamente mais complicada e robusta, e os seus sinais devem possuir um corpo de significação muito mais complexo e mediato. Se a linguagem corrente é, como afirma o aforismo 4.002, "um traje que disfarça o pensamento", a linguagem completamente analisada exibiria o pensamento nu e cru, pensamento que estaria oculto, na linguagem corrente, sob o traje de certas formas de expressão. Diversas linguagens, com gramáticas distintas, se equivaleriam na medida em que pudessem ser traduzidas para essa linguagem padrão, para essa linguagem *canônica*.

Vejamos como é difícil juntar esse raciocínio com as ideias de Wittgenstein sobre a matemática já em terreno tractariano. Aquilo que chamamos de seu *Grundgedanke* já havia sido expresso no aforismo 6.1261 do *Tractatus*: "Na lógica, processo e resultado são equivalentes. (Por isso, nenhuma surpresa.)". Entretanto, no contexto do *Tractatus*, esse princípio não pode receber a radicalidade que ele receberá em escritos posteriores. Consideremos, por exemplo, a demonstração da proposição $2 \times 2 = 4$, fornecida no aforismo 6.241. Ela vai mostrar que aplicar reiteradamente duas vezes o quadrado de uma operação (i.e., a composição de uma operação com ela própria) sobre uma base fornece o mesmo resultado que aplicar reiteradamente quatro vezes essa operação sobre essa base. O critério de identidade do resultado, assim, não é de modo algum fornecido pelo processo por meio do qual ele é engendrado. Aliás, o *mesmo* resultado também é obtido ao se aplicar reiteradamente essa operação duas vezes sobre uma base e, posteriormente, mais duas vezes, o que se mostra pela correção da equação $2 + 2 = 4$. Isso porque, dada uma operação Ω e uma proposição *p* qualquer, o símbolo Ω^4p simboliza de

8 Cf. ibid, p. 159, aforismo 3.325.

ANALYTICA
volume 21
número 1
2017

maneira independente do modo pelo qual ele foi engendrado. O fato de diversos processos produzirem um *mesmo* resultado era inclusive tomado por Wittgenstein como evidência para a inexistência de objetos lógicos (de constantes lógicas):

> Aqui se evidencia que não há "objetos lógicos", "constantes lógicas" (no sentido de Frege e Russell).
>
> Pois: são idênticos os resultados de operações de verdade com funções de verdade que sejam todos uma única e mesma função de verdade de proposições elementares. (ibid, p. 217, aforismos 5.4-5.41)

O entendimento radical da ideia fundamental requer, pelo contrário, que se considere como distintos resultados provenientes de processos distintos, bem como que se considere distintas proposições que foram provadas de maneiras distintas. Requer, portanto, uma *radicalização da distinção tractariana entre sinal e símbolo*.

E o que significa, então, a ideia fundamental no *Tractatus*, já que lá ela não recebe a força que receberá futuramente? Significa, tão somente, que o resultado é *critério* para o erro na execução de um processo: se eu computei 21×35 pelo método tradicional e o resultado deu 730, então a conta está errada. Dito de outro modo, o resultado não é algo de novo que surge com o processo, mas é por ele completamente determinado. No *Tractatus*, no entanto, esse modo de compreender a equivalência entre processo e resultado em nada impedia o uso de um processo para o reconhecimento de uma característica do resultado que em nada dependia do processo, p. ex., o reconhecimento do caráter tautológico de uma proposição por meio de sua derivação a partir de outras tautologias. Isso porque o *sentido de uma proposição não dependia do modo particular pelo qual ela era gerada a partir da aplicação sucessiva de operações de verdade a proposições elementares, mas tão somente de quais eram os seus fundamentos de verdade*.

O resultado da radicalização da ideia de que na lógica e na matemática processo e resultado são equivalentes é, assim, o resultado do abandono de uma estrutura subjacente às regras, às técnicas de calcular. No que interessa para a discussão sobre a consistência da aritmética, tal resultado pode ser resumido em duas "teses":

1. As técnicas que compõem um sistema matemático são, salvo a adição de novas regras,

ANALYTICA
volume 21
número 1
2017

independentes uma da outra. Nenhuma técnica pode entrar em conflito com outra, já que elas não apenas engendram resultados, mas também constituem o critério de identidade de tais resultados.

2. Não existe um "processo canônico" que possa fornecer o critério de identidade de "objetos matemáticos". Todas as técnicas possuem os mesmos direitos: nenhuma é mais *fundamental* que a outra.

6. A dupla acepção das provas indutivas

Mas, e quanto à prova indutiva? Ela não prova que duas técnicas fornecem o mesmo resultado e que, portanto, este resultado independe de qual técnica se aplica? Aqui, é preciso fazer uma distinção entre dois modos de se conceber a prova indutiva. O primeiro deles é a prova indutiva enquanto *parte de uma técnica*. Digamos que haja uma classe de propriedades de números e que os membros dessa classe sejam designados por φ_1, φ_2, φ_3, e assim por diante. Tal classe poderia ser, por exemplo, a seguinte:

$\varphi_1(n)$ = a enésima casa decimal de $\frac{1}{9}$ é 1

$\varphi_2(n)$ = a enésima casa decimal de $\frac{2}{9}$ é 2

...

$\varphi_i(n)$ = a enésima casa decimal de $\frac{i}{9}$ é i

...

Suponhamos que a técnica – que designaremos por T_1 – para a solução de uma questão da forma $\varphi_i(n)$, para um n particular, seja a seguinte:

i. Mostra-se que $\varphi_i(1)$ e que $\varphi_i(x) \supset \varphi_i(x+1)$;

ii. Deduz-se que $(x)\varphi_i(x)$;

iii. Finalmente, deduz-se que $\varphi_i(n)$.

ANALYTICA
volume 21
número 1
2017

Tal técnica conteria, então, uma prova indutiva como parte de sua aplicação. Consideremos, agora, uma técnica T_2 que consiste nos seguintes passos:

i. Mostra-se $\varphi_i(1)$;

ii. A partir de (i) mostra-se $\varphi_i(2)$;

iii. A partir de (ii) mostra-se $\varphi_i(3)$;

...

n. A partir de (n-1) mostra-se $\varphi_i(n)$.

Ora, se a identidade do resultado depende dos meios utilizados para obtê-lo, vale notar que as técnicas T_1 e T_2 não provaram o *mesmo* resultado por caminhos distintos, pois *caminhos distintos produzem resultados distintos*. A prova de $\varphi_i(n)$ por meio de T_1 não é um *atalho* para a prova de $\varphi_i(n)$ por meio de T_2. Deste modo, não pode haver nem coincidência, nem conflito de resultados entre T_1 e T_2 (embora a *prosa* matemática possa fazer parecer com que haja coincidência ou conflito[9]).

Um outro modo de se conceber a prova indutiva é entendê-la não enquanto parte de uma técnica, mas enquanto *conexão entre técnicas*. De acordo com essa acepção da prova indutiva, ela não é estritamente uma prova, ao menos se chamarmos de *prova* a aplicação de uma determinada técnica. Ao invés disso, a prova indutiva nos leva à adoção de uma regra que conecta as técnicas T_1 e T_2. A regra é a seguinte:

(R_1) O resultado da técnica T_1 é critério para o erro na aplicação da técnica T_2.

O mesmo ocorreria, por exemplo, no caso da soma de Gauss:

(R_2) O resultado da técnica G é critério para o erro na aplicação da técnica T.

Isso pode significar, p. ex., que mediante o seguinte par de resultados $1+\ldots+n \neq_T x$ $1+\ldots+n =_G x$, o movimento correto a ser feito no interior do jogo é riscar todo o corpo de prova de e não utilizar mais nenhuma configuração deste corpo de prova como configuração inicial de uma nova prova.

9 Cf. Wittgenstein (1984, p. 120): "In Wahrheit liegt die Sache so: Der Kalkül als Kalkül ist in Ordnung. Es hat gar keine Sinn, von Widerspruch zu reden. Was man einen Widerspruch nennt, entsteht, sowie man aus dem Kalkül heraustritt und in Prosa sagt: *Also* gilt diese Eigenschaft für alle Zahlen, aber die Zahl 17 hat diese Eigenschaft nicht".

ANALYTICA
volume 21
número 1
2017

Não seria mais simples dizer que o que a prova indutiva mostra é que a técnica T fornece o mesmo resultado que a técnica G? Mas o que diríamos, então, se a técnica T não fornecer o mesmo resultado que a técnica G? Diríamos que a técnica G produz resultados falsos? Ou diríamos que houve um erro de cálculo? O que estamos dispostos a aceitar é que a prova indutiva mostra que a técnica T *deve* fornecer o mesmo resultado (o mesmo signo numérico) da técnica G ou, de maneira similar, que a *correta* aplicação da técnica T fornece o mesmo resultado da técnica G. O cálculo, portanto, não "profetiza" o resultado da aplicação de uma técnica, mas apenas determina o que deve contar como resultado correto ou incorreto.

Apesar de ser uma obviedade, vale salientar aqui que um erro de cálculo faz parte do cálculo. Isto é, só erra quem está jogando. Alguém que não esteja jogando o jogo de xadrez, mas apenas tirando o pó das peças, não poderia ser acusado de estar violando uma regra do xadrez. Assim, os dispositivos sobre o que fazer quando há um erro de cálculo também fazem parte do jogo. A regra R_2 acima pode ser perfeitamente entendida como sendo um destes dispositivos.

Vejamos, então, o que ocorre de acordo com a segunda acepção da prova indutiva. Anteriormente à "prova", haviam duas técnicas (T e G) independentes, dois sistemas, portanto, de cálculo. Cada sistema introduz um *conceito* distinto: T introduz o conceito "soma dos *n* primeiros números naturais" e G introduz o conceito "metade do produto de *n* pelo seu sucessor". Cada sistema introduz um conjunto de *questões* distintas: "qual a soma dos 2, 3, ... primeiros números naturais?" e "quanto é a metade do produto de 2, 3, ... pelo seu sucessor?", respectivamente.

Após a prova, um novo sistema composto de duas técnicas relacionadas pela regra R_2 é criado. O conceito "soma dos *n* primeiros números naturais" é alterado, pois ele passa a incluir um novo critério, dado pela técnica G. Questões da forma "qual a soma dos 2, 3, ... primeiros números naturais?" passam a poder ser resolvidas de duas maneiras distintas, e quando há um aparente conflito entre ambos os modos de se resolver uma destas questões, é dada prioridade à técnica G.[10] A prova indutiva, neste caso, não *justificou* uma nova maneira de se responder a uma velha questão, pois ela alterou o *significado* da questão, alterou o *significado* dos conceitos envolvidos. Pois o critério de identidade de um conceito são (todos) os seus critérios de correta e incorreta aplicação.

10 Um outro sistema com os mesmos direitos poderia dar prioridade à técnica T. Uma outra alternativa seria não conceder prioridade a uma das técnicas e postergar a decisão para a resolução de um possível conflito apenas quando este surgir efetivamente.

ANALYTICA
volume 21
número 1
2017

Quando Wittgenstein fala, em certa conversa com Waismann,[11] de um domínio (*Bereich*) de proposições, ele está se referindo a este domínio (decidível) que é estabelecido por meio de um sistema e de seus conceitos.[12] Dado um tal domínio, é impossível mostrar que uma técnica é redundante, pois tal domínio é apenas definido mediante o conjunto de técnicas. Não se pode falar, p. ex., que é possível resolver todas as questões da forma "qual a soma dos 2, 3, ... primeiros números naturais?" pela técnica tradicional, e que a técnica da soma de Gauss é útil na prática, mas teoricamente dispensável. Pois só se compreende aquilo que uma destas questões quer dizer, i.e., o seu "sentido", mediante a totalidade de técnicas que definem os conceitos utilizados.

Nota-se que, nesta segunda acepção da prova indutiva, ela não é a prova de uma proposição matemática, mas aquilo que de alguma maneira nos motiva a *construir um novo sistema matemático*, a *alterar um conceito matemático antigo*. Nas conversas com o círculo de Viena, Wittgenstein vai insistir que não há um "Portanto" (*Also*) após uma prova indutiva (nessa segunda acepção), e com isso ele quer dizer que tal prova não corresponde a um método para se responder a uma questão prévia, como corresponderia se as técnicas mantivessem relações conceituais independentemente de termos efetivamente traçado essas relações, como corresponderia se houvessem relações ocultas, subterrâneas, entre duas técnicas distintas. (A crítica, aqui, também atinge o *Tractatus*, que postulava a existência de relações lógicas "subterrâneas", *e.g.*, entre as proposições "Isto é vermelho" e "Isto é verde").

Diversas passagens das conversas precisam ser lidas levando-se em consideração essa acepção das provas indutivas. Uma delas é a polêmica passagem sobre as provas de consistência relativa:

> Consistência "relativa à geometria euclidiana" é um completo absurdo. O que ocorre, aqui, é o seguinte: uma regra corresponde a uma regra (uma configuração do jogo a uma configuração do jogo). Temos aqui um mapeamento. Ponto final! Qualquer outra coisa que seja dita é prosa. É dito: *Portanto* o sistema é consistente. Mas não há nenhum "portanto", tampouco quanto no caso da indução. (WITTGENSTEIN, 1984, p. 145)

11 Cf. Wittgenstein (1984, p. 145-6).

12 E não, como se questiona o Waismann de Pereira (2013, p. 283-4), ao que é geralmente indicado por Th[A], i.e., o conjunto de teoremas dados pelos axiomas em A e pelas regras para o desenvolvimento do cálculo.

ANALYTICA
volume 21
número 1
2017

A insistência aqui é na ideia de que uma "prova" que relaciona dois sistemas não demonstra uma proposição matemática. E isso pois o que ela faz não é *descobrir* uma relação entre os dois sistemas que existia anteriormente à prova (o que é impossível, já que, como dissemos anteriormente, os sistemas matemáticos – o que inclui seus conceitos, técnicas e questões – são logicamente independentes), mas ela induz a *construção* de um novo sistema.

A dupla acepção das provas indutivas corresponde à distinção que Frege estabelece entre configurações de peças e regras do jogo do seguinte modo: no primeiro caso, uma prova indutiva é um meio para se chegar a uma certa configuração de peças no interior de um jogo, ao passo que, no segundo caso, uma prova indutiva origina um novo jogo pela adoção de uma nova regra.

7. Trivialidade e jogo tautológico

Vimos anteriormente que uma "contradição escondida" nas regras não é danosa ao jogo na medida em que ela permanece escondida, i.e., na medida em que é possível prosseguir no jogo. Essa argumentação, porém, pode parecer um tanto quanto sem alvo, pois o perigo de uma contradição, sob o olhar dos lógicos, reside não nas regras, mas nas configurações. Isso porque a prova de uma configuração da forma '$p \wedge \neg p$' em ambiente clássico ou intuicionista implica a "trivialidade" do cálculo, no sentido em que qualquer fórmula passa a ser "trivialmente" derivável. E a trivialidade do cálculo, diriam, "representa a sua ruína" (MARCOS, 2010, p. 145). O mesmo ocorreria na aritmética se a fórmula '$0 = 1$' é provada, como afirma o Waismann de Pereira:

> WAISMANN PODERIA TER DITO AINDA: (...) Se provamos que $0 = 1$, obviamente podemos provar que $m = n$, para todo m e para todo n. De fato podemos provar (por indução) qualquer sentença aritmética, se provamos que $0 = 1$; e para isso não necessitamos de alguma regra mágica (e discutível) que permitiria a derivação de qualquer proposição a partir de uma demonstração legítima de uma contradição. Não necessitaríamos acrescentar (com Hilbert) o axioma '$0 \neq 0 \rightarrow A$'. É como se, uma vez que demonstrássemos $0 = 1$, a aritmética se destruísse internamente. Você aqui diria: "É muito fácil: basta (arbitrariamente) modificar as regras do jogo." Eu diria: como saberíamos que o novo jogo não passa pelo mesmo problema?

ANALYTICA
volume 21
número 1
2017

> WITTGENSTEIN RESPONDE: "O jogo tautológico é apenas mais um jogo, um jogo entre outros jogos."
>
> WAISMANN PODERIA TER DITO: No jogo tautológico tudo é permitido? E como você ganha nesse jogo? Talvez a pergunta correta seria: e como você perde nesse jogo? (PEREIRA, 2013, p. 288)

Termos como "ruína", "explosão", "destruição", são bastante frequentes na literatura para se descrever o que ocorre quando um cálculo permite a derivação de qualquer fórmula.[13] Em uma apresentação informal do primeiro teorema de incompletude de Gödel, por exemplo, Hofstadter compara um sistema formal a um tocador de discos, e observa que Gödel encontrou algo como a nota cuja frequência é a frequência ressonante deste tocador. Então, das duas uma: ou o tocador de discos não é potente o suficiente para tocar esta nota, ou ele o é mas ao custo de sua autodestruição.[14] Mas essas são apenas metáforas, e o lógico não hesitaria duas vezes em dizer que é possível explicitar completamente as razões para se abandonar um sistema trivial. Imagino que essas razões sejam de duas ordens: uma que concerne ao cálculo *enquanto cálculo* e outra que concerne ao cálculo *enquanto instrumento*. Poder-se-ia dizer, em primeiro lugar, que aquilo que constitui o interesse da atividade matemática é a busca por provas não-triviais de teoremas. Deste modo, na medida em que qualquer sentença passa a ser um teorema através uma prova trivial, o sistema perde seu interesse. Por outro lado, seria possível pensar que teorias inscritas em um sistema trivial jamais poderiam ser satisfeitas e, portanto, tais teorias perdem a sua capacidade descritiva. Ora, descrever uma coisa é apontar aquilo que é verdadeiro e/ou aquilo que é falso sobre essa coisa. Um sistema trivial, porém, é incapaz de separar essas duas noções, é incapaz de distinguir aquilo que é daquilo que não é.

Seriam razoáveis tais razões? Antes de prosseguir, porém, ser-nos-á conveniente traçar uma distinção entre o *jogo tautológico* e o *jogo trivial*. O jogo trivial é o jogo em que toda sentença é capaz de ser provada. Mas cada uma dessas sentenças é apenas provada pela aplicação *correta* das "regras de inferência". A trivialidade não torna o jogo carnavalesco: nem

---

13 O próprio princípio segundo o qual, a partir de uma fórmula falsa, qualquer coisa se segue é chamado de "princípio da explosão".

14 Cf. Hofstadter (1979, pp. 75-102).

ANALYTICA
volume 21
número 1
2017

tudo é permitido. Isto é, o sistema ainda consegue distinguir entre provas corretas e incorretas. O "jogo tautológico", porém – ressalta Wittgenstein – , é aquele em que "as *regras do jogo* são tautológicas (quando elas, portanto, nada mais permitem ou proíbem)" (WITTGENSTEIN, 1984, p. 132).

Parece haver, a respeito dessas duas noções, um mal-entendido na leitura de Pereira. Pois o que Wittgenstein diz não é que "o jogo tautológico é apenas mais um jogo, um jogo entre outros jogos", mas sim que o jogo trivial é apena mais um jogo, um jogo entre outros jogos. O jogo tautológico, pelo contrário, ocupa uma posição especial na totalidade dos jogos, posição esta análoga à ocupada, no cenário do *Tractatus*, pela tautologia na totalidade de funções de verdade de proposições elementares. E, do mesmo modo que a tautologia deixa de ser uma proposição significativa por não ser mais bipolar, o "jogo tautológico" também deixa de ser um jogo por não possuir mais regras, pois uma "regra tautológica" já não mais *regra*, i.e., já não mais distingue um movimento *correto* de um *incorreto*.

Uma vez desfeita essa ambiguidade, voltemo-nos para a acusação de que um sistema trivial não é interessante. A razão puramente teórica pretende vincular o interesse de um sistema formal na ausência de trivialidade da noção de demonstrabilidade de uma sentença. O *modo* pelo qual uma sentença é provada não é aqui importante, mas apenas *que* ela possa ser provada. A razão não nos parece, contudo, cogente. Em primeiro lugar, pois ela vai na contramão da ideia de que, na matemática, o *modo pelo qual uma proposição é provada é relevante*, vai contra a insistência dos matemáticos de que *provas alternativas de um mesmo teorema não são de modo algum supérfluas*. Por que não seria interessante buscar uma prova alternativa de um teorema em um sistema inconsistente? Além disso, se utilizarmos, como critério de identidade de uma sentença, o *modo pela qual ela é provada* (em consonância com a ideia fundamental de Wittgenstein), então é simplesmente falso dizer que em um sistema trivial toda sentença é demonstrável.

Esse prejuízo em relação à prova, em benefício da demonstrabilidade, parece também estar presente na razão prática para se julgar "desinteressante" um "jogo trivial". E isso porque é pressuposta uma *imagem* da aplicação do cálculo, em que a capacidade descritiva de uma teoria é medida justamente pela sua competência em separar fórmulas demonstráveis de fórmulas indemonstráveis. Ora, se o "jogo trivial" não perde sua capacidade de distinguir entre provas corretas e incorretas, não estaria aí precisamente tudo aquilo que é preciso para se aplicar um cálculo enquanto

ANALYTICA
volume 21
número 1
2017

teoria?[15] Não seria possível mapear *provas corretas* em sentenças asseridas como verdadeiras pela teoria e *provas incorretas* em sentenças falsas segundo a teoria? Pois não é necessário, é claro, que a aplicação de um cálculo seja concebida segundo a ortodoxia da teoria dos modelos. A aplicação de um cálculo, diria Wittgenstein, cuida de si própria.[16] Isto é, não é necessário que tracemos os limites da aplicação de um cálculo, que descrevamos o que é a aplicação de um cálculo, pois toda descrição resultará numa restrição *artificial* das aplicações possíveis de um cálculo.[17]

Wittgenstein fornece, aliás, nas conversas com Waismann e o círculo de Viena, exemplos de como provas distintas de sentenças aparentemente "contrárias" podem ser mapeadas em métodos de verificação distintos de uma certa alegação empírica, dotando assim o modo pelo qual uma proposição é provada de relevância para a aplicação do cálculo. Suponha, por exemplo, que aos axiomas de Euclides seja acrescido o axioma segundo o qual a soma dos ângulos internos de um triângulo seja igual a 181°. Neste caso, diz Wittgenstein, "seria pensável uma aplicação, p. ex., do tipo em que a soma dos ângulos de um certo triângulo seja 180° segundo um método de mensuração e 181° segundo um outro método de mensuração" (WITTGENSTEIN, 1984, p. 127).[18] Assim, não seria de modo algum uma contradição obter, como resultado da medição de um ângulo por um transferidor, o valor de 180° e obter, como resultado da medição deste ângulo por um teodolito, o valor de 181°.

Teríamos, no caso acima, o exemplo de aplicação de um cálculo em que não apenas *que* uma proposição seja demonstrável é importante, mas também o *modo* pela qual ela é demonstrada possui um papel. O juízo segundo o qual uma teoria trivial não é "útil" parece requerer, pelo contrário, que apenas o "ser demonstrável" de uma sentença seja relevante para a aplicação. Mas isto é uma restrição arbitrária das aplicações possíveis de um cálculo, e não um limite natural de sua aplicabilidade.

---

15 Aqui nos interessará apenas a aplicação do cálculo enquanto *teoria*, embora Wittgenstein também afirme que o cálculo pode encontrar uma aplicação *gramatical*. Sobre esses dois modos de se aplicar um cálculo, cf. Wittgenstein (1984, p. 126).

16 Cf. Wittgenstein (1964, p. 130, Seção §109).

17 É notável, aqui, a aplicação de diversos *insights* do *Tractatus* a respeito da autonomia da lógica. Uma investigação dessa analogia, ao que nos parece, forneceria resultados significativos.

18 Cf. tb. ibid, p. 149 e pp. 197-9.

ANALYTICA
volume 21
número 1
2017

Deste modo, parece ser suficiente para a aplicação do cálculo que ele *seja um cálculo*, i.e. que ele possa distinguir entre a correta e a incorreta aplicação de uma técnica de calcular. A possibilidade de se aplicar um cálculo só encontraria problemas quando qualquer resultado obtido pudesse ser considerado como correto e incorreto ou, alternativamente, como nem correto nem incorreto. Quando o jogo fosse "tautológico"; quando, portanto, ele deixasse de ser um jogo.

8. A negação na matemática

Já se viu, em algumas observações de Wittgenstein sobre a inconsistência, uma espécie de predição do surgimento das lógicas paraconsistentes na segunda metade do século passado. A seguinte passagem, datada de dezembro de 1930, é bastante alusiva:

> De fato, eu já prevejo que haverão investigações matemáticas sobre cálculos que contêm uma contradição, e as pessoas realmente se orgulharão de terem se emancipado até mesmo da consistência. (ibid, p. 139)

Penso, contudo, que essa leitura é equivocada, pois a lógica paraconsistente também parece partilhar do prejuízo segundo o qual um sistema "trivial" é desinteressante. Aquilo que Wittgenstein quer sublinhar nesta passagem é que o "problema da consistência da aritmética", visto como a tentativa de se demonstrar que um certo cálculo não produz a fórmula "0≠0", não é uma questão de vida ou morte para a aritmética, porque nem o prosseguir no cálculo dela depende nem a sua aplicabilidade. A *bipolaridade* necessária para a existência do cálculo não reside, pois, nas configurações demonstráveis, mas nas suas *regras*. E se assim o é, não deveríamos procurar o sentido da *negação* na matemática lá onde esta bipolaridade se faz presente? Com efeito, Wittgenstein parece conceber a negação de uma fórmula matemática não como, de maneira clássica, a alegação de que uma fórmula é falsa (por fornecer uma descrição incorreta de uma certa realidade matemática), tampouco como, de maneira intuicionista, a de que uma prova daquela fórmula levaria a uma prova de uma absurdidade, mas como a alegação de que há um *erro de cálculo* em uma suposta prova daquela fórmula. A prova, portanto, de uma fórmula negativa só pode consistir no reconhecimento de que é *outro* cálculo que é o correto.

ANALYTICA
volume 21
número 1
2017

Deste raciocínio Wittgenstein tirava duas lições:

i. Não tomar como *contraditórias* duas fórmulas apenas por que elas foram escritas como "p" e "¬p", mas tomar como contraditórias apenas fórmulas que correspondem, respectivamente, a um cálculo correto e a um cálculo incorreto. Wittgenstein notava, em particular, que um erro em uma suposta prova indutiva da fórmula "¬(∃n).fn" não fornecia um contraexemplo da forma "f(*a*)" e que, portanto, não se poderia ver, neste par de fórmulas, um par de fórmulas contraditórias.[19]

ii. Não tomar como imprescindível, para a linguagem de um cálculo aritmético, a inclusão de um sinal de negação. Isso porque, na verdade, nosso interesse primário em um cálculo é pelas fórmulas corretas, e não pelas fórmulas incorretas. O aprendizado elementar da multiplicação, digamos, requer responder quanto *é* – e não quanto *não* é – uma fórmula da forma $a \times b$. Nosso interesse na negação na aritmética, vai dizer Wittgenstein, parece ocorrer apenas na presença de uma certa *generalidade*.[20] Mas o que isso significa, afinal? Significa que a negação é útil para se mostrar algo em comum a respeito de uma classe de erros de cálculo. A prova de que $2\times3 \neq 5$ é feita mostrando-se que $2\times3 = 6$ e, portanto, $2\times3 \neq 5$. Mas também poderíamos fornecer uma prova indutiva de que "não há número que, multiplicado por 3, resulta em 5". De acordo com a (segunda) concepção das provas indutivas que fornecemos anteriormente, isso significa que o conceito de "multiplicação por 3" seria alterado pela prova, e passaríamos a adotar a regra segundo a qual um resultado igual a 5 é suficiente para declarar um cálculo da forma "n×3" como incorreto, ainda que não saibamos qual é o resultado correto.

Uma vez dado esse sentido à negação, o que significa dizer que um cálculo é *consistente*? Apenas que ele é capaz de separar movimentos corretos de movimentos incorretos dentro do jogo calculatório. Mas essa é uma propriedade *constitutiva*, e não meramente *desejável*, de um cálculo. Sendo assim, uma *prova* de não contradição de um cálculo é impossível, pois é impossível fornecer o objeto de estudo sem ver, ao mesmo tempo, que a propriedade é satisfeita para este objeto.

19 Cf. Wittgenstein (2005, p. 427).
20 Cf. Wittgenstein (1964, p. 247, Seção §200).

ANALYTICA
volume 21
número 1
2017

9. Comentários finais

As conversas de Wittgenstein com Waismann e o círculo de Viena no início dos anos 30 se mostram relevantes para uma análise de suas reflexões sobre o programa de Hilbert de fundamentação da matemática, sobretudo quando elas são apresentadas como resultado de princípios que podem ser explicitados de modo coerente. Certamente seria justo que disséssemos, como Pereira, que essas conversas foram mais longas (e certamente muito mais interessantes) e que não foi possível tratar aqui de todos os tópicos que lá constam.[21] Entretanto, o objetivo principal desse texto foi apresentar alguns tópicos dessa conversa de maneira mais sistemática, de modo a que qualquer objeção às ideias de Wittgenstein pudesse ser feito em pontos específicos de sua argumentação. Procuramos mostrar que a frases aparentemente dogmáticas do tipo "Temos um mapeamento. Ponto final! Qualquer outra coisa que seja dita é prosa" pode ser concedido um lugar nessa exposição sistemática.

Há, é claro, muito a ser feito quando o objetivo é estudar, à luz do que foi apresentado, os principais resultados da lógica contemporânea. Algumas das questões que Pereira coloca em seu artigo, tais como:

- Qual o significado dos resultados de independência, de completude/incompletude, de decidibilidade/indecidibilidade?
- O que significa a ideia de modelagem de uma teoria em outra?
- As provas de impossibilidade são todas por indução?

só poderiam receber uma resposta satisfatória mediante o exame minucioso destas provas e resultados. Também se ganharia muito, creio, com uma leitura dos resultados de incompletude de Gödel sob tal perspectiva. Pretendo levar a cabo esta leitura em um trabalho posterior.

Como resultado concreto já deste trabalho, aponto a contestação da ideia bastante corrente de que um sistema trivial já não possui mais interesse matemático. Penso que novas investigações de grande interesse para a lógica podem surgir dessa ideia, investigações sobre a aplicação de cálculos que levem em consideração não apenas a *demonstrabilidade* de uma

21 Em particular, nota-se a ausência de uma discussão aprofundada sobre um tema de grande importância, qual seja, o das provas indiretas na matemática.

ANALYTICA
volume 21
número 1
2017

sentença, mas os modos particulares por meio dos quais ela é demonstrada. E neste dia pode ser que as pessoas se orgulhem de terem se emancipado até mesmo do mote "Thou shalt not trivialize!".[22]

RESUMO

O objetivo deste artigo é estruturar, em torno de uma única ideia fundamental, a saber, a de que não há atalhos pela lógica, os diversos comentários de Wittgenstein à época das conversas com Waismann e o círculo de Viena sobre o problema da consistência da aritmética. Observações notórias sobre as noções de consistência, trivialidade e negação na matemática são consideradas do ponto de vista dessa sistematização. Analisa-se também em que medida esses comentários correspondem a um desenvolvimento crítico do pensamento do autor.

Palavras-chave *filosofia da matemática, consistência, negação, Wittgenstein, contradição.*

ABSTRACT

This work aims at structuring, around a single fundamental idea, namely, that there are no shortcuts through logic, the various comments by Wittgenstein at the time of the conversations with Waismann and the Vienna circle on the problem of the consistency of arithmetic. Notable remarks on the notions of consistency, triviality and negation in mathematics are considered from the point of view of this systematization. It is also analyzed to what extent these comments correspond to a critical development of the author's thinking.

Keywords *philosophy of mathematics, consistency, negation, Wittgenstein, contradiction.*

22 Cf. Carnielli & Marcos (2012, p. 2).

ANALYTICA
volume 21
número 1
2017

Bibliografia

CARNIELLI, W.; MARCOS, J. 2002. A Taxonomy of C-systems. In: CARNIELLI, W. A. et al. *Paraconsistency*: the logical way to inconsistency. Proceedings of the Second World Congress on Paraconsistency. New York: Marcel Dekker.

FREGE, G. 1983/1903. *Grundgesetze der Arithmetik V1-2*: Begriffsschriftlich Abgeleitet, Jena: Hermann Pohle.

GENTZEN, G. 1936. The consistency of elementary number theory. In: GENTZEN, G. 1969. *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. Translated and edited by M. E. Szabo. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

HOFSTADTER, D. 1979. *Gödel, Escher, Bach*. New York: Basic Books.

MARCOS, J. 2010. (Wittgenstein & Paraconsistência). DOI: 10.5007/1808-1711.2010v14n1p135. *Princípia*, v. 14, n. 1, pp. 135-73.

MARTIN-LÖF, P. 1984. *Intuitionistic Type Theory*, Napoli: Bibliopolis.

PEREIRA, L. C. 2013. O que Waismann poderia ter dito a Wittgenstein mas .... (Parte 1). *Analytica*, v. 17, n. 2, pp. 279-89.

WITTGENSTEIN, L. 1964. *Philosophische Bemerkungen*, ed. por Rush Rhees. Frankfurt: Suhrkamp.

WITTGENSTEIN, L. 1976. *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics, Cambridge, 1939*: From the Notes of R. G. Bosanquet, Norman Malcolm, Rush Rhees, and Yorick Smythies. Ed. por C. Diamond. Hassocks: The Harvester Press.

WITTGENSTEIN, L. 1978. *Remarks on the Foundations of mathematics*. Ed. por G. H. von Wright, R. Rhees e G. E. M. Anscombe. Terceira edição. Oxford: Basil Blackwell.

WITTGENSTEIN, L. 1984. *Wittgenstein und der Wiener Kreis*. Werkausgabe Band 3. Frankfurt: Suhrkamp.

WITTGENSTEIN, L. 1993. *Tractatus Logico-Philosophicus*, trad. por Luis Henrique Lopes dos Santos, São Paulo: EdUSP.

WITTGENSTEIN, L. 2005. *The Big Typescript: TS 213*, ed. e trad. por C. Grant Luckhardt e Maximilian A. E. Aue, Malden: Blackwell.

Recebido em abril de 2017
Aprovado em outubro de 2017