O que Waismann poderia ter dito a Wittgenstein mas .... (Parte 1)

Luiz Carlos Pereira
PUC-Rio/UERJ[1]

Durante o período 1930 – 1931, Wittgenstein manteve várias conversas com Waismann e Schlick sobre a consistência e a possibilidade de contradições em cálculos e sistemas formais. Essas conversas foram publicadas no volume *Wittgenstein e o Círculo de Viena* e aparecem também, em um modo de composição diferente, como um apêndice de algumas edições das *Observações Filosóficas*. As intervenções de Wittgenstein durante essas conversas foram invariavelmente acompanhadas por uma série de comentários e expressões muito negativas (e talvez mesmo um pouco grosseiras). Essa atitude me parece completamente injustificada e equivocada, já que, afinal de contas, as observações e perguntas de Waismann eram pertinentes, interessantes e certamente muito razoáveis. Apesar de eu não ter qualquer tipo de acesso especial à grande maioria dos lógicos e matemáticos, corro o risco de considerar Waismann um bom porta-voz da posição dessa grande maioria (e aqui eu me incluo nessa maioria).

O objetivo desta breve nota é construir uma espécie de breve diálogo imaginário/alternativo entre Waismann e Wittgenstein, no qual o Waismann fictício diz o que eu penso que o Waismann real deveria ter dito nos diálogos reais que ocorreram. Creio que podemos resumir a posição de Waismann em sete perguntas que apresento a seguir:

1. Por que seríamos impedidos de fazer perguntas sobre um sistema de axiomas ou sobre um cálculo? Por que não faria sentido fazer perguntas sobre um sistema de axiomas? E os resultados de independência? E os resultados de completude/incompletude, e de decidibilidade/

1 Pesquisa realizada com o apoio de uma bolsa de produtividade em pesquisa (PQ) do CNPQ e do projeto FAPERJ/PRONEX *Predicação e Existência* (E - 26 / 110.565/201)

ANALYTICA
volume 17
número 2
2013

indecidibilidade? Afinal de contas, perguntas e considerações *sobre* um sistema de axiomas parecem fazer sentido, parecem ser significativas e mesmo importantes. Resultados e considerações sobre a derivabilidade e a não derivabilidade em um sistema de axiomas parecem conter informações muito relevantes e importantes sobre o alcance do próprio sistema, e um resultado sobre a consistência é um resultado sobre não derivabilidade. Não são esses *insights/descobertas* relevantes para o próprio uso do sistema e do cálculo?

2. A inconsistência é equivalente à trivialidade. Todo conjunto de proposições inconsistente é trivial, no sentido de que qualquer proposição é derivável desse conjunto (pelo menos clássica e intuicionisticamente). Será um jogo inconsistente/trivial um jogo? Qual é o interesse e o fim de uma teoria trivial?

3. Por que não podemos ter uma teoria sobre a aritmética e por que não deveríamos utilizar as proposições dessa teoria para obter informações relevantes sobre as possibilidades desse *jogo*? Essa teoria é a *metamatemática* de Hilbert.

4. E se a teoria prova a impossibilidade de uma certa posição/configuração? O que isso significa? Por exemplo, a impossibilidade de uma certa configuração em um tabuleiro.

5. Qual é o significado das provas de consistência relativa? A geometria de Riemann modelada na geometria euclidiana, por exemplo? A aritmética de Peano modelada/interpretada/traduzida na aritmética de Heyting?

6. Se alguém diz que não há contradição no cálculo, como isso se encaixa com a natureza das provas indiretas; pois esse tipo de prova depende precisamente da produção de uma contradição no cálculo? Provas indiretas dependem essencialmente do fato de que uma contradição é derivada no cálculo.

7. É realmente notável que os matemáticos tenham tamanha confiança nos modos transfinitos de inferência, de tal maneira que, uma vez que uma prova que utiliza métodos transfinitos seja conhecida, ninguém se importa mais em tentar descobrir um contraexemplo. A questão que surge agora é: esta confiança é justificável? Ou seja, o que justifica nossa certeza de que uma proposição que tenha sido provada por métodos transfinitos nunca poderá ser refutada por um cálculo numérico concreto? Essa é claramente uma forma do problema matemático de consistência.

ANALYTICA
volume 17
número 2
2013

Nossa conversa fictícia neste trabalho girará fundamentalmente em torno da primeira pergunta, a saber, se faz sentido fazer perguntas sobre um sistema de axiomas ou não. As falas do Waismann real e de Wittgenstein aparecem em uma tradução (mais ou menos livre) das falas da conversa original.

WAISMANN PERGUNTA: "Mas não faz sentido fazer perguntas sobre um sistema de axiomas? Vamos considerar, por exemplo, o cálculo proposicional que Russell deriva de cinco axiomas. Bernays mostrou que um desses axiomas é redundante, e que tudo pode ser feito com apenas 4 axiomas. Ele mostrou em seguida que esses axiomas formam um 'sistema completo', ou seja, que a adição de um outro axioma que não possa ser derivado desses 4 torna possível a derivação de qualquer outra proposição. Isso equivale a dizer que qualquer proposição decorre de uma contradição. Ora, isso não é um *insight* substancial sobre o cálculo russelliano? Ou, para dar outro exemplo, suponha que eu tenha escolhido três axiomas. Eu não posso obter o mesmo conjunto de proposições que obtenho dos cinco axiomas originais a partir desses três. Isso não é um *insight* substancial? Logo, você não poderia considerar uma prova de consistência como o reconhecimento de algo substancial?"

WITTGENSTEIN RESPONDE: "A fim de comparar dois sistemas devo formar um novo sistema no qual ocorrem ambas as classes de consequências. E eu também não obtenho nenhum tipo de *insight* substancial; o que eu faço é, uma vez mais, construir um cálculo, e nesse cálculo a proposição 'Uma classe inclui mais do que a outra' não ocorre: essa é a prosa que acompanha o cálculo".

WAISMANN PODERIA TER DITO: Mas não poderíamos permanecer no mesmo sistema? Nós simplesmente poderíamos ver/provar que no sistema S não usamos o axioma 5, ou que, sem usar o axioma 4, não podemos provar o teorema 35. De certa forma a mesma coisa poderia ser dita das interpretações/traduções/ imersões que Gentzen e Gödel estão definindo[2]: não é necessário que esses resultados sejam compreendidos como tendo estabelecido que a aritmética de Peano pode ser interpretada/traduzida/imersa na aritmética de Heyting, mas sim que, dada qualquer sentença que não envolva a disjunção e o quantificador existencial, se essa sentença pode ser provada na aritmética de Peano, então essa sentença também pode

2 As traduções de Gödel e de Gentzen foram publicadas depois dessas conversas!

ANALYTICA
volume 17
número 2
2013

ser provada na própria aritmética de Peano sem o uso de certas regras ou axiomas (eliminação da dupla negação, terceiro-excluído, regra do absurdo clássico). Não há nessa formulação qualquer referência à aritmética de Heyting. De certa forma, esse ponto está relacionado com a minha quinta questão: qual é o significado de provas relativas de consistência? A geometria de Riemann foi modelada na geometria euclidiana. A aritmética de Peano pode ser modelada na aritmética de Heyting. No caso da aritmética, essa modelagem surge em um contexto de preocupações fundacionais: a consistência da aritmética de Heyting implica a consistência da aritmética de Peano. O que significa para você essa ideia de modelagem? Se é que ela significa alguma coisa?

WITTGENSTEIN REPONDE: "Consistência 'relativa à geometria euclidiana' é um completo absurdo. O que temos é uma regra que corresponde a uma outra regra, uma configuração no jogo corresponde a uma configuração no jogo. Temos um mapeamento. Ponto final! Qualquer outra coisa que seja dita é prosa. A prova demonstra o que ela prova: as relações internas que as regras (configurações) de um grupo mantêm com um outro grupo são semelhantes àquelas que as regras (configurações) do outro grupo mantêm. Isso é o que a prova mostra e nada mais.

WAISMANN PODERIA TER DITO: Desculpe-me, mas esse é exatamente o significado que propus para traduções e interpretações. Mostramos que um grupo mantém uma certa relação com um outro grupo. Tudo é feito dentro do mesmo sistema. Se você aceitar que nós podemos comparar os grupos de regras e grupos de configurações em um jogo, isso é tudo o que eu preciso. Similaridade é uma forma de relação/comparação. Tendo em conta que estamos provando algo sobre regras (configurações) no jogo, por que não estamos provando algo sobre o jogo? Qual é a fronteira real entre cálculo e prosa? Por que a afirmação 'Temos um mapeamento. Ponto final!' não é prosa? O que realmente significa dizer que algumas regras/configurações são semelhantes a outras regras/configurações? É difícil não tematizar o cálculo. Você diz que essa tematização deve assumir a forma de um outro cálculo. O seu discurso, no entanto, não se parece em nada com um cálculo. Lamento, mas para mim esse discurso não passa de um bom dedo de prosa!

WITTGENSTEIN CONTINUA: "Vamos supor que temos 5 axiomas. Nós agora fazemos a descoberta de que um desses axiomas pode ser derivado de outros quatro, e, assim, é redun-

ANALYTICA
volume 17
número 2
2013

dante. Agora eu pergunto: Qual é o significado de tal descoberta? Acredito que a situação aqui é exatamente como no caso da descoberta de Sheffer de que podemos fazer tudo com apenas uma constante lógica".

WAISMANN PODERIA TER DITO: Você retornou à minha primeira pergunta. Já propus que as definições podem ser feitas dentro do mesmo sistema e que podemos provar "semelhanças" entre os grupos (regras / configurações) dentro do mesmo jogo. O seu exemplo dos 5 ou 4 axiomas mostra exatamente isso. Um outro ponto importante: a descoberta de Sheffer não pode ser de modo algum comparada com os resultados de independência. Os dois resultados estabelecem coisas muito diferentes. Um resultado de independência pode ser obtido em uma linguagem muito econômica (apenas com a barra de Sheffer). Um outro exemplo de resultado que não pode ser comparado com o resultado de Sheffer (apesar de que trate de fragmentos da linguagem) estabelece que não podemos distinguir os teoremas clássicos dos teoremas intuicionistas no fragmento $\{\neg, \wedge\}$. Além do mais, você tem que dar um sentido à ideia de *descoberta* que você está utilizando. O que significa "descoberta" no contexto da lógica e da matemática. As vezes parece que você, de maneira proposital, está usando a ideia de *descoberta* como a utilizaríamos em um contexto empírico: a descoberta de algo sobre o cálculo está fora do cálculo. Em um certo sentido isso é trivialmente verdadeiro; mas de forma alguma isso transforma a descoberta em algo empírico.

WITTGENSTEIN INSISTE: "Acima de tudo, vamos ser claros: os axiomas definem - quando tomados em conjunto com as regras para o desenvolvimento do cálculo - um grupo de proposições. Este domínio de proposições não nos é dado de alguma outra forma, mas apenas pelos cinco axiomas. Portanto, não podemos perguntar: É o mesmo domínio, talvez também definido por apenas quatro axiomas? Pois o domínio não é destacável dos 5 axiomas. Esses 5 axiomas e qualquer coisa que seja deles derivável são - por assim dizer - o meu mundo inteiro. Eu não posso sair para fora deste mundo."

WAISMANN PODERIA TER DITO: Lamento mais uma vez, mas o que você quer dizer com "os axiomas definem - quando tomados em conjunto com as regras para o desenvolvimento do cálculo - um grupo de proposições"? O que você realmente quer dizer com "domínio de proposições"? Você quer dizer com "domínio de proposições" o que geralmente é indicado por Th[A], o conjunto de teoremas "definidos" pelos axiomas em A e "as regras para o desenvolvi-

ANALYTICA
volume 17
número 2
2013

mento do cálculo"? Porque se for assim, parece claro que faz sentido dizer que Th[A] = Th[A′] para alguns A′ tal que $A \neq A'$. É importante observar que o domínio determinado por quatro axiomas incluirá o quinto axioma e que o domínio determinado por cinco axiomas também incluirá o quinto axioma, mas de acordo com dois "modos" diferentes de inclusão. Acrescentaria que a sua referência à própria ideia de um *domínio de proposições* não soa muito wittgensteiniana: como compatibilizar o realismo que parece estar por trás dessa ideia de um "domínio de proposicões" com uma concepção sem prosa da matemática como um cálculo/jogo?

WITTGENSTEIN DIZ: "Nós não provamos coisa alguma, nós vemos alguma coisa! É uma questão de ver, não de provar. Nenhuma proposição corresponde ao que eu vejo - a possibilidade do sistema. Nada é afirmado/pedido, e assim, também não há nada a ser provado. Logo, se nesse caso eu tenho 5 axiomas onde 4 fariam o mesmo serviço, eu seria simplesmente culpado de um descuido. Pois eu certamente deveria saber desde o início que um desses cinco axiomas era redundante, e se eu não me dei conta desse fato, isso foi simplesmente um erro. É claro que não é suficiente nesse caso simplesmente fixar os axiomas; também devemos provar que eles realmente são independentes."

WAISMANN PODERIA TER DITO: Agora eu tenho que confessar que não entendo mais o que você está dizendo! Como eu poderia "saber desde o início que um desses cinco axiomas era redundante"? Como eu poderia simplesmente ser culpado de um descuido"? Quando escrevemos os axiomas, devemos ao mesmo tempo já provar que os axiomas são realmente independentes? Os resultados de independência fazem sentido? Os resultados de completude de Post fazem sentido? Será que a descoberta de que os axiomas são "realmente independentes" pertence ao cálculo? O enunciado de um resultado de independência pertence à "prosa"? Deixe-me conectar esse ponto com a minha pergunta número 4: e se a teoria prova a impossibilidade de uma certa posição/configuração?

WAISMANN DIZ: "Até agora só lidamos com o caso em que a teoria diz que tal e tal posição é possível. Mas e se a teoria prova a impossibilidade de uma determinada posição - por exemplo, as quatro torres em uma linha reta ao lado do outro? E é exatamente esse tipo de caso que é tratado por Hilbert. Nesse caso a teoria não pode reproduzir o jogo. Os passos no cálculo já não correspondem aos lances no jogo."

ANALYTICA
volume 17
número 2
2013

WAISMANN PODERIA CONTINUAR: Você já mostrou, de um modo muito interessante, que a prova da possibilidade simplesmente simula em um cálculo/jogo os movimentos do outro cálculo / jogo. A ideia principal é: o que é possível, também é real. Mas e quanto à impossibilidade de alguma coisa, por exemplo, de uma configuração? Esse ponto nos leva diretamente à questão de número 6: se alguém diz que não houve contradição alguma no cálculo, como podemos entender como isso se encaixa com a natureza das provas indiretas, pois esse tipo de prova claramente depende da produção de uma contradição no cálculo? Provas indiretas dependem claramente do fato de que uma contradição é derivada no cálculo.

WAISMANN CONTINUA: "Há uma teoria de xadrez, não há? Assim, podemos certamente usar essa teoria para nos ajudar a obter informações sobre as possibilidades do jogo - por exemplo, se caso nos encontremos em uma posição determinada, se poderíamos forçar um cheque mate em 8 jogadas, e assim por diante. Se há uma teoria do jogo de xadrez, então não vejo por que não deveria haver também uma teoria do jogo da aritmética e por que não poderíamos usar as proposições dessa teoria para obter informações relevantes sobre as possibilidades desse jogo. Esta teoria é metamatemática de Hilbert."

WAISMANN PODERIA CONTINUAR DIZENDO: Eu sei que você diria que a metamatemática de Hilbert não passa de um outro cálculo, de uma outra matemática, e que qualquer associação com questões fundacionais é "mera prosa". Mas os teoremas dessa "outra" matemática fornecem informações importantes sobre a matemática! Por exemplo, que não podemos encontrar um algoritmo para decidir, em qualquer teoria suficientemente rica, se uma determinada proposição é um teorema ou não.

WITTGENSTEIN DIZ: "Certamente que não [que os passos no cálculo já não correspondem aos lances no jogo]. Mas, mesmo nesse caso deve aparecer que a teoria é um cálculo, apenas um diferente do jogo. Aqui temos um novo cálculo diante de nós, um cálculo com uma multiplicidade diferente. Antes de qualquer coisa: se eu provo que eu não posso fazer tal e tal coisa, eu não provo uma proposição, eu dou uma indução".

WAISMANN PODERIA TER DITO: Você está realmente dizendo que todas as provas da impossibilidade são provas por indução? Como é que essa indução se conecta com o cálculo? Que indução é essa?

ANALYTICA
volume 17
número 2
2013

WITTGENSTEIN CONTINUA: "Agora diremos que ainda deve haver alguma ligação entre o jogo real e a indução. E há de fato uma conexão - que consiste no fato de que, uma vez que me foi dada a prova por indução, eu não vou mais tentar configurar esta posição no jogo. Antes eu poderia talvez ter tentado e finalmente ter desistido. Agora eu não vou tentar mais nada. Esse caso é exatamente igual ao caso em que eu provo por indução que existem infinitos primos, ou que $\sqrt{2}$ é irracional. O efeito dessas provas sobre a prática real da aritmética é simplesmente que as pessoas deixam de procurar um "maior número primo", ou por uma fração igual a $\sqrt{2}$. Mas aqui temos que ser ainda mais precisos do que isso."

OBSERVAÇÃO INTERESSANTE DE WAISMANN: Esta posição é bastante interessante, pois de alguma forma ela me lembra a posição de Brouwer: quando encontramos uma contradição simplesmente vemos que não podemos ir mais longe! É como se encontrássemos uma parede impedindo nosso avanço. Esse modo de entender o princípio de não-contradição é fundamental para a tese brouweriana de que a matemática não depende da lógica

WAISMANN PODERIA TER DITO: Isso é muito estranho! Existem provas por indução. Será que essas provas pertencem ao cálculo? Como poderiam essas provas ter um "efeito" sobre nós a respeito do cálculo, se elas não são sobre o cálculo? A prova por indução nos faria parar de procurar uma prova ou um contraexemplo?

WAISMANN CONTINUA PERGUNTANDO: (Você disse anteriormente) que não houve contradição alguma no cálculo. Como podemos provar a negação de uma fórmula? A coisa toda parece se reduzir a seguinte ideia: não existem configurações negadas, pois configurações não são afirmações / proposições e a negação é um operador proposicional. Mais uma vez, por causa disso você diz que não há contradições no cálculo. Mas como é essa ideia compatível com provas indiretas? Temos regras negadas e as regras não são proposições! Você mesmo disse que:

"Can one negate a picture? No. And in this lies the difference between picture and proposition. The picture can serve as a proposition. But in that case something gets added to it, which brings it about that now it says something. In short: I can only deny that the picture is right, but the picture I cannot deny."

Você diria que essa é a sua posição antiga, mas a ideia de que não negamos um quadro me parce que continua uma boa ideia.

ANALYTICA
volume 17
número 2
2013

WITTGENSTEIN AFIRMA:"O que eu quero dizer não tem nada a ver com a natureza das provas indiretas. Há uma confusão aqui. É claro que existem contradições no cálculo e tudo o que eu quero dizer é isso: não faz sentido falar de uma contradição escondida. Pois o que seria uma contradição oculta?"

WAISMANN PODERIA TER DITO: Há ou não há contradições no cálculo? Se aceitamos a ideia de que os axiomas e as regras definem um"domínio", por que não podemos pensar em uma contradição nesse"domínio"? O domínio está definido como um conjunto de proposições dede o início? Não seria essa uma posição bastante realista?

WAISMANN REPETE A PERGUNTA:"Você disse que por meio de proibições e permissões sempre posso apenas determinar um jogo, mas nunca o jogo. Mas é isso mesmo? Imagine por exemplo o caso em que qualquer movimento é permitido no xadrez e nada é proibido. – Isso ainda seria um jogo? Deveriam as regras de um jogo ter certas propriedades para que elas definam um jogo? Não poderíamos então interpretar a exigência de consistência como uma forma de excluir o jogo"tautológico" - o jogo em que tudo é permitido? Ou seja, se a fórmula"$0 \neq 0$" pode ser derivada a partir de uma prova legítima e se, além disso, com Hilbert, acrescentamos o axioma'$0 \neq 0 \rightarrow A$', onde A representa uma fórmula arbitrária, então podemos derivar a fórmula A a partir da inferência

$$\frac{\begin{array}{l} 0 \neq 0 \rightarrow A \\ 0 \neq 0 \end{array}}{A}$$

e escrevê-la também (Waismann poderia ter dito: como um novo teorema). Mas isso significa que nesse caso qualquer fórmula pode ser derivada, e assim o jogo perde o seu caráter e o seu interesse ".

WAISMANN PODERIA TER DITO AINDA: Gostaria de voltar ao tema da prova indireta e da indução. No caso da aritmética, nós não necessitamos da forma geral do *ex falso quodlibet*

ANALYTICA
volume 17
número 2
2013

(the principle of explosion). Se provamos que 0 = 1, obviamente podemos provar que m = n, para todo m e para todo n. De fato podemos provar (por indução) qualquer sentença aritmética, se provamos que 0 = 1; e para isso não necessitamos de alguma regra mágica (e discutível) que permitiria a derivação de qualquer proposição a partir de uma demonstração legítima de uma contradição. Não necessitaríamos acrescentar (com Hilbert) o axioma '$0 \neq 0 \rightarrow A$'. É como se, uma vez que demonstrássemos 0 = 1, a aritmética se destruísse internamente. Você aqui diria: "É muito fácil: basta (arbitrariamente) modificar as regras do jogo." Eu diria: como saberíamos que o novo jogo não passa pelo mesmo problema?

WITTGENSTEIN RESPONDE: "O jogo tautológico é apenas mais um jogo, um jogo entre outros jogos."

WAISMANN PODERIA TER DITO: No jogo tautológico tudo é permitido? E como você ganha nesse jogo? Talvez a pergunta correta seria: e como você perde nesse jogo?

WAISMANN PODERIA TER DITO (para finalizar): Não sei se chegamos a algum lugar; estou certo de que temos ainda muito a dizer e discutir sobre a questão da consistência, mas talvez devêssemos parar por aqui.

Comentários finais

1. É óbvio que muito mais poderia ter sido dito, principalmente com relação à participação de Wittgenstein. A conversa entre Wittgenstein e Waismann foi muito mais longa (e certamente muito mais interessante) do que a que aqui foi apresentada. Meu objetivo com essa breve nota foi muito simples: tentar mostrar que algumas observações de Wittgenstein não podem ser aceitas sem uma elaboração maior. Em alguns momentos foi como se a própria linguagem estivesse traindo Wittgenstein (como ele próprio em diferentes ocasiões parece ter percebido). O Wittgenstein que entra em cena por vezes é dogmático, realista, confuso e impaciente. Em determinados momentos é quase irresistível não atribuir a Wittgenstein um certo desconhecimento técnico. Não tive de modo algum a pretensão de confrontar Wittgenstein, mas simplesmente de, através da voz de um Waismann fictício, pedir algumas explicações e esclarecimentos.

ANALYTICA
volume 17
número 2
2013

2. Como afirmei no início, essa breve nota tratou apenas da primeira pergunta (com brevíssimas referencias a outras das perguntas listadas no início do texto). Encontra-se em preparação uma versão mais completa da conversa na qual todas as questões serão discutidas.

3. Estou certo que a pesquisa desenvolvida pelo professor André Porto sobre a "tese" da mutação semântica poderá lançar uma nova luz sobre essas questões.

RESUMO

Durante o período 1930 – 1931, Wittgenstein manteve várias conversas com Waismann e Schlick sobre a consistência e a possibilidade de contradições em cálculos e sistemas formais. Essas conversas foram publicadas no volume Wittgenstein e o Círculo de Viena e aparecem também, em um modo de composição diferente, como um apêndice de algumas edições das Observações Filosóficas. O objetivo desta breve nota é construir uma espécie de breve diálogo imaginário/alternativo entre Waismann e Wittgenstein, no qual o Waismann fictício diz o que eu penso que o Waismann real deveria ter dito nos diálogos reais que ocorreram.

Palavras-chave *Wittgenstein; Waismann; consistência; inconsistência; contradição; Cálculo.*

ABSTRACT

During the period 1930 – 1031, Wittgenstein had several conversations with Waismann and Schlick on consistency and on the possibility of contradictions in formal systems and calculi. These conversations appear in the volume Wittgenstein and the Vienna Circle and as an appendix of some editions of the Philosophical Remarks. The aim of this short note is to construct an imaginary/alternative dialogue between Waismann and Wittgenstein in which the former says what he should have said in the real dialogues that did occur.

Key-words *Wittgenstein; Waismann; consistency; inconsistency; contradiction; calculus*

Recebido em 08/2014
Aprovado em 09/2014