Nota crítica à compreensão de Gueroult do teorema de Pitágoras apresentado por Euclides

César Augusto Battisti
UNIOESTE

Introdução

O objetivo do presente texto[1] é examinar uma rápida passagem do volume dois do famoso livro *Descartes segundo a ordem das razões* (ainda sem tradução para o português), de Martial Gueroult,[2] concernente ao teorema de Pitágoras apresentado por Euclides nos *Elementos*. As motivações para a sua análise são emergentes do caráter paradigmático – e enigmático – que assumem Euclides e a geometria na perspectiva defendida pelo intérprete por ocasião da exposição que ele faz da metafísica cartesiana. Razões dessa ambivalência serão fornecidas ao longo do texto.[3]

1 Trabalho realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – Brasil. Agradeço à Lia Levy pela agradável e salutar supervisão de meu estágio pós-doutoral, realizado na UFRGS de fevereiro de 2014 a janeiro de 2015, no âmbito do qual o atual trabalho foi redigido. Agradeço também ao Renato F. Merli pela leitura do texto e pelas sugestões.

2 Publicado na França em 1953, esse clássico da historiografia cartesiana foi traduzido para outras línguas, como o inglês e o espanhol (cf. referências bibliográficas), e deverá em breve ser publicado em português aqui no Brasil. Todas as citações deste e dos outros textos em língua estrangeira são de minha autoria.

3 Teria alguma importância elaborar uma nota crítica a uma obra publicada há mais de sessenta anos? O lugar central ocupado pela interpretação gueroultiano nos estudos cartesianos justifica, por si só, toda tentativa de compreendê-la e todo debate crítico que se possa travar com ela: Gueroult é, depois de mais de meio século, ainda muito influente, e muitos de seus elementos analítico-conceituais fazem parte do *background* de interpretações do início do século XXI. Além disso, a importância atribuída em sua obra a "questões metodológicas" faz dele um interlocutor fundamental para quem estuda temas dessa natureza na filosofia cartesiana.

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

O propósito de Gueroult, na seção em que se localiza a passagem (cf. mais adiante), é o de mostrar a independência da prova cartesiana da existência dos corpos frente à da união alma-corpo e, com isso, dissipar a acusação de circularidade entre elas. A tese do intérprete é a de que não há entrecruzamento vicioso de espécie alguma entre tais provas fornecidas na última das seis *Meditações* de Descartes, salvo se, interrompendo a dinâmica do "movimento contínuo de pensamento" que as envolve, confundirmos as duas ordens, "a ordem das condições da ciência com a ordem das condições das coisas" (Gueroult, 1953, 2, p. 108-9).[4] O exame do teorema de Pitágoras, de sua parte, seria instrutivo, continua Gueroult, para o entendimento do problema da imbricação entre as provas, pois, tendo se pautado na distinção entre essas duas concepções de ordem,[5] Euclides teria procedido, na proposição I.47 dos *Elementos*, da mesma forma que Descartes, sem jamais ter sido acusado de circularidade ou paralogismo.[6]

A discussão que segue limita-se à avaliação do modo de compreensão gueroultiana do teorema de Pitágoras feita a partir da exposição euclidiana (Prop. I.47) e da noção de ordem que se encontra subjacente aos *Elementos*, sem se estender a questões concernentes às relações en-

4 Tendo como principal interlocutor Étienne Gilson, Gueroult examina, nesta seção, a segunda parte do que Gilson chamou de "paradoxo cartesiano" (Gilson, 1984, p. 245), a primeira referindo-se à também suposta circularidade entre as duas primeiras provas da *Meditação Sexta*, a da distinção entre alma e corpo e a da existência dos corpos (Gueroult, 1953, 2, p. 68, n. 13).

5 Gueroult caracteriza de diferentes maneiras o quadro de contraposição entre a "ordem das razões" (ou "ordem da ciência") e a "ordem das coisas" (ou "ordem real"), como se pode averiguar tanto na seção a ser examinada quanto em outros momentos da obra (p. ex., Gueroult, 1953, 1, p. 26-7; 2, p. 108-13; 2, p. 287-291). A distinção entre "ordem das razões" e "ordem das matérias" é cartesiana (AT, 3, p. 266-7), mas disso não se segue que Descartes e Gueroult estejam tratando exatamente das mesmas noções.

6 Euclides e a geometria não são temas da investigação gueroultiana propriamente dita (tampouco *A Geometria* de Descartes). Nesse sentido, poder-se-ia avaliar como marginais e despretensiosas as afirmações de Gueroult a respeito, não fosse a centralidade que assumem o geômetra grego e sua ciência no âmago da concepção do intérprete cartesiano. Cf. duas passagens que confirmam o papel fundamental atribuído por Gueroult a Euclides e à geometria: "O modelo que seguirá o filósofo [Descartes] não será mais o *Tratado de Filosofia*, dividido em capítulos, ou a *Summa*, com suas questões e seus artigos, mas os *Elementos* de Euclides" (Gueroult, 1953, 1, p. 20); "As *Seis Meditações* não são senão a réplica metafísica dos *Quinze Livros* dos *Elementos* de Euclides. Se as noções de que elas tratam pudessem, como os conceitos da geometria, apoiar-se na imaginação, em vez de serem contrariadas por ela, as *Seis Meditações*, elas mesmas, não seriam senão *Livros* como aqueles de Euclides" (Gueroult, 1953, 2, p. 288).

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

tre as referidas provas cartesianas ou a outras questões metodológicas da metafísica cartesiana. Embora a passagem a ser examinada esteja inserida em um contexto metodológico bastante complexo atinente à totalidade da obra gueroultiana, o atual estudo, por mais que algumas de suas conclusões apontem para uma perspectiva bastante crítica da visão do intérprete, mantém-se circunscrito ao tema supramencionado, deixando para pesquisas futuras uma avaliação metodológica mais geral da obra de Gueroult.

Cabe esclarecer, desde já, que as discussões feitas a seguir partem de um ponto de vista cartesiano, e avaliam-se os *Elementos* a partir dessa perspectiva, não apenas em razão da tese gueroultiana de que Euclides procedera como Descartes, mas também em virtude da pertinência de uma análise desse gênero: ainda que Euclides não faça uso explícito de noções metageométricas,[7] os *Elementos* "contêm" uma noção de ordem, sendo essa noção tema de debate nos estudos euclidianos,[8] embora não necessariamente com os mesmos marcadores da noção cartesiana. A principal razão, entretanto, pela qual não é fora de propósito examinar os *Elementos* com esse objetivo é o fato de que é o próprio Descartes quem atribui aos geômetras gregos a noção de ordem, tendo-os ele imitado em suas *Meditações*.[9] Assim, um estudo da obra euclidiana, dentro desse quadro, poderá permitir também uma avaliação da configuração que a noção de ordem assume no âmbito da filosofia cartesiana nela mesma.

7 O discurso euclidiano, como veremos, é um discurso que se limita ao nível geométrico, evitando todo tipo de consideração ou conceituação de natureza metacientífica ou epistêmica. Termos como os de "ordem", "método", "prova" (e outros como "dependência", "anterioridade", "implicação" etc.) não ocorrem nos *Elementos*, devendo as noções correspondentes, quando for o caso, serem construídas pelo intérprete.

8 Confira, por exemplo, Peletier du Mans, em sua tradução dos primeiros seis livros dos *Elementos* (Peletier du Mans, 1628, p. 15; p. 27): "Pois a ordem é o guia mais seguro para tratar e aprender as disciplinas"; "Euclides percorreu seus *Elementos geométricos*, tanto uns quanto outros, conforme eles podiam um depois do outro servir à sua obra: e isso com a melhor ordem jamais seguida por alguém antes dele".

9 Diz Descartes: "No modo de escrever dos geômetras, distingo duas coisas, a saber, a ordem e a maneira de demonstrar"; "E certamente empenhei-me, tanto quanto pude, em seguir esta ordem em minhas *Meditações*" (Descartes, 1983b, p. 166; AT, 7, p. 155; AT, 9-1, p. 121).

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

1 Os *Elementos* de Euclides

Os *Elementos* são um dos textos mais famosos e mais influentes da história da humanidade. Escritos por volta dos anos 300 a.C., seu conteúdo é, em boa medida, uma compilação de conhecimentos de geometria elementar disponíveis na cultura grega da época; e, em razão desse perfil, seus treze livros, totalizando 465 proposições, tratam de temas cuja diversidade e riqueza múltipla rivalizam com sua "estrutura lógica" unitária e seu ordenamento sistemático exemplar. Embora tenham se destacado pelo seu tratamento axiomático e pela sua sistematicidade, razão pela qual têm servido de modelo às demais ciências, uma visão de seus temas evidencia muito mais sua diversidade material do que sua unidade estrutural.

Sua estrutura marcante pode ser desmembrada em três diferentes níveis: o primeiro deles diz respeito à divisão em livros e ao seu sequenciamento; o segundo, à distinção entre os três tipos de primeiros princípios (definições, postulados e noções comuns); e o terceiro, ao *status* das proposições (teoremas e problemas) e à sua ligação com os primeiros princípios. Como se sabe, é essa hierarquia entre os dois últimos conjuntos de entidades (primeiros princípios e proposições) que caracteriza, em termos gerais, a estrutura axiomática dos *Elementos*, em razão da dependência demonstrativa das proposições para com os princípios primeiros e da independência destes últimos frente a elas. Os *Elementos* têm, além disso, outra característica surpreendente: eles são de uma limpidez completa, dada a total ausência de elementos introdutórios, de comentários, de digressões, de nomes e de contextualização histórica, de reflexões epistemológicas ou de qualquer outro tipo de observação que destoe da estrutura demonstrativa propriamente dita (pelo menos se nos ativermos às edições consideradas fiéis ao original euclidiano).

Essa é uma das razões pelas quais, desde a Idade Clássica, foram sendo introduzidos "comentários" de diferentes tipos (prática comum até o século XVII) como forma de contextualizar, discutir e clarificar determinados temas, bem como de sanar certas lacunas lógico-demonstrativas, muitas vezes em razão da corrupção do próprio texto utilizado na edição. De um modo geral, tanto as edições gregas e árabes e, depois, as latinas tinham como preocupação central "o reforço de sua estrutura e de sua coerência discursiva e lógica" (Rommevaux, 2005, p. 29). Assim, a história do texto euclidiano se caracteriza por "um fenômeno de ampliação", não sendo fácil discernir, dada a variedade das fontes a partir das quais tem procedência uma edição, o que é tradução, recensão ou comentário da obra ou de parte dela. O texto euclidiano publicado por

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

Clavius (1ª ed., 1574), por exemplo, que nos interessa mais de perto, mais que duplicou seu volume a partir da ampliação em sua segunda edição (1589), mas sempre com o cuidado de dissociar (embora haja também algumas intervenções) o texto de Euclides dos acréscimos do tradutor (predominantemente acréscimos em formato de "escólios" subsequentes às proposições e de comentários aos primeiros princípios).[10]

Os *Elementos*, do ponto de vista da sua divisão mais geral, contêm, nas edições atuais, treze livros,[11] cujos conteúdos estão por vezes em forte continuidade e outras quase sem ligação "material". Os Livros I e II tratam de geometria retilínea plana, sendo o segundo muitas vezes caracterizado (embora haja interpretações divergentes) como um livro de "álgebra geométrica", dada a possibilidade da transposição algébrica de seu conteúdo. O Livro III estuda a geometria do círculo (e ângulos) e suas propriedades, ao passo que o Livro IV trata dos polígonos regulares e da sua inscrição e circunscrição (primeiro subconjunto). O Livro V, por sua vez, introduz a teoria das razões e proporções, ausente nos livros anteriores, cuja abrangência engloba todo tipo de magnitudes (comensuráveis e incomensuráveis), e o Livro VI a aplica à geometria plana, ao mesmo tempo em que introduz a noção de semelhança entre figuras retilíneas (segundo subconjunto). Os Livros VII, VIII e IX (terceiro subconjunto) abordam temas distintos aos dos livros anteriores: chamados de "livros aritméticos", eles apresentam uma teoria dos números, representados por linhas retas, e expõem uma segunda teoria das proporções (numérica) e sua aplicação em sequências geométricas. O Livro X (quarto subconjunto) se debruça sobre linhas (magnitudes) incomensuráveis ou irracionais, tendo como suporte a teoria das proporções do

---

10 Novas edições foram publicadas posteriormente. Faremos referência à de 1607, citada por Gueroult. Alguns especialistas têm discutido se a edição de Clavius é efetivamente uma tradução, em razão das intervenções que ele faz no texto euclidiano. Heath (1956, 1, p. 105) afirma não ser ela verdadeiramente uma tradução e Maurice Caveing (*apud* Rommevaux, 2005, p. 109), na introdução à tradução francesa feita por Bernard Vitrac (1990-2001), a trata como uma recensão. Por outro lado, Rommevaux observa que, por mais que haja intervenção sobre o *corpus* do texto, prática "corrente entre os editores sucessivos dos *Elementos*", "Clavius intervém finalmente muito pouco sobre o texto euclidiano"; e, portanto, antes do que uma recensão ou uma reescritura, trata-se de uma "edição comentada", e suas intervenções "não põem, fundamentalmente, em causa o conteúdo e a importância das teorias apresentadas nos *Elementos*" (Rommevaux, 2005, p. 57; 58; 109).

11 Muitas das edições dos séculos XVI e XVII, como a de Commandino (1ª ed., 1572) e de Clavius, continham quinze livros, tendo este último adicionado também um decimo sexto. Tais livros foram excluídos das edições atuais, por terem sido considerados espúrios.

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

Livro V. Os últimos três livros tratam de geometria no espaço (quinto subconjunto). O Livro XI diz respeito à geometria sólida elementar, e suas proposições generalizam proposições dos livros relativos à geometria plana. O Livro XII trata da medida dos sólidos (áreas e volumes) e aplica o método da exaustão, nele tendo importância capital a primeira proposição do Livro X. O Livro XIII, finalmente, se volta ao estudo dos cinco sólidos regulares (pirâmide ou tetraedro, octaedro, cubo, icosaedro e dodecaedro), generalizando espacialmente o Livro IV.

Tendo em conta o segundo nível de divisão estrutural da obra, concernente à sua perspectiva axiomática, o texto euclidiano institui a capital diferença epistêmica entre primeiros princípios e proposições, em sintonia com discussões filosóficas da época (em especial, com as de Aristóteles). Cada qual com funções próprias, as definições, os postulados e as noções comuns são introduzidos no início, para posterior utilização. Na verdade, somente o Livro I contém postulados e noções comuns, ao passo que vários outros, mas não todos, contêm definições.[12] Isso denuncia a importância e a generalidade dos postulados e das noções comuns, por vezes apenas eles chamados de primeiros princípios e se constituindo em verdades gerais auto evidentes e fundantes. As definições, por outro lado, têm a função de apresentar novos objetos e podem funcionar como indicação da mudança de temas entre os livros, sendo introduzidas, em geral, no livro a partir do qual deles se faz uso. Os primeiros princípios, de todo modo, antecedem necessariamente as proposições, dada sua independência epistêmica frente a elas, as quais, por sua vez, precisam deles. E, assim, a autonomia e a primazia epistêmicas deles lhes confere uma anterioridade expositiva frente às proposições.

Do ponto de vista do terceiro nível, o das proposições, há duas distinções fundamentais, aquela que as separa dos primeiros princípios, dos quais elas dependem, e aquela interna às proposições. (Essa última distinção entre teoremas e problemas não é aqui examinada, visto que escapa aos objetivos do presente texto.) Embora não seja coisa fácil determinar o quadro que compõe as noções de anterioridade e de dependência, os *Elementos* são ordenados de tal forma que nada do que vem antes necessite, em sua prova, do que vem depois: eles, efetivamente, respeitam o critério exigido a uma estrutura axiomática dedutiva, de sorte que *toda e qualquer proposição só utiliza conhecimentos anteriores*, sejam aqueles proporcionados pelos primeiros

12 Edições renascentistas e modernas continham axiomas e postulados em outros livros. Clavius apresenta, no Livro V, um axioma e, no Livro VII, dois postulados e 12 axiomas.

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

princípios sejam aqueles fornecidos pelas proposições já provadas. Essa característica não sofre violação por ocasião da volumosa edição de Clavius; muito ao contrário, suas intervenções "são o signo de um cuidado constante: a procura sistemática de lacunas internas ao texto e a explicação de tudo o que pode parecer implícito, a fim de torná-lo sem falhas lógicas" (Rommevaux, 2005, p. 57). Em razão disso, podemos falar de um "ordenamento" das proposições euclidianas, e parece-nos plenamente adequada aos *Elementos* a definição de "ordem" atribuída por Descartes ao "modo de escrever dos geômetras" (cf. mais adiante). Todos os treze livros dos *Elementos* seguem rigorosamente o preceito que preconiza fazer uso apenas e exclusivamente de conhecimentos anteriormente estabelecidos, algo perseguido por Euclides ao longo de toda a obra, cujo sucesso tem sido reconhecido ao longo dos séculos.[13] E, portanto, a noção de ordem, tal como definida por Descartes, não deixa de ser adequada ao ordenamento dos *Elementos*, desde que, com isso, não se queira inflar essa noção ou a ela reduzir o sistema axiomático euclidiano em sua totalidade.[14]

Tomemos, com esse propósito, algumas proposições do Livro I (sem entrar na análise de seu conteúdo), composto por um conjunto de 23 definições, cinco postulados e nove noções comuns,[15] seguido de 48 proposições (14 problemas e 34 teoremas), cuja proposição 47 corresponde ao teorema de Pitágoras, ponto central da presente investigação. A Prop. I.47, por

13 As lacunas existentes nos *Elementos* não comprometem o seu modelo e suas intenções, e podem ser avaliadas pela distância entre projeto e realização. Muito embora a obra tenha recebido críticas e não tenha o rigor formal das axiomáticas contemporâneas, ela tem sido vista, ao longo da história, como "paradigma científico".

14 Confira a definição de ordem cartesiana com a observação de W. Knorr (1973, p. 179) de que há um "evidente objetivo em Euclides de organizar os teoremas em geometria de modo que, para cada prova, todos os materiais necessários – definições, axiomas, lemas, etc. – apareçam como preliminares".

15 O número de postulados e de noções comuns (ou axiomas) do Livro I tem certa variação, mesmo atualmente, em razão de alterações introduzidas pela edição de Heiberg e Stamatis (1969-1977) em relação à edição, anterior, de Heiberg e Menge (1883-1916), utilizadas como edições *standard*. A tradução de Heath, feita no início do século XX, seguindo Heiberg e Menge, contém cinco postulados e cinco noções comuns; a tradução brasileira de Bicudo, por outro lado, feita no início do século XXI, seguindo Heiberg e Stamatis, contém cinco postulados e nove noções comuns. Os outros livros quase não apresentam variações. Na época de Descartes, o número de definições e de noções comuns do Livro I era bem maior do que nas edições de hoje: a edição de Commandino de 1622 continha 35 definições, cinco postulados e 10 axiomas, e a de Clavius de 1607, 36 definições, quatro postulados e 20 axiomas. Dada essa variedade, a indicação dos primeiros princípios será feita a partir das edições mais recentes.

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

exemplo, faz uso das Prop. I.4, I.14, I.30, I.31, I.41 e I.46, e é, por outro lado, utilizada na Prop. I.48 e também nos livros posteriores (nos limitamos, aqui, a observações apenas sobre os quatro primeiros livros e, mais adiante, a algumas poucas sobre os imediatamente seguintes). A Prop. I.26, por sua vez, só depende de proposições que aparecem bem anteriormente: ela depende das Prop. I.3, I.4 e da Prop. I.16, e é utilizada apenas na Prop. I.34 e, depois, somente no Livro III. As Prop. I.21 e I.17, de sua parte, embora cada qual utilize a proposição imediatamente anterior (I.20 e I.16), não são úteis em seguida, mas somente no Livro III em diante (apenas a partir, respectivamente, da III.8 e da III.16). Finalmente, a título de último exemplo, a Prop. I.4,[16] da mesma forma que as demais, se baseia em alguns dos primeiros princípios, mas, neste caso, apenas neles, sem se apoiar em nenhuma proposição, sendo muito útil às que lhe seguem imediatamente (a começar pela I.5) e também às seguintes, totalizando quase trinta proposições até o final do Livro IV.

O que podemos dizer, portanto, da noção de "ordem" euclidiana? Não sendo alterados os lugares de outras proposições, a I.47 não pode mudar sua posição: ela depende da I.46 e é utilizada pela I.48, estando, portanto, amarrada entre as duas. A I.26, por outro lado, poderia ser antecipada e posta imediatamente depois da I.16, ou, então, poderia ser deslocada para mais adiante, desde que se mantivesse anterior à I.34, visto não depender das suas imediatamente anteriores nem ser necessária às suas imediatamente posteriores. A I.21 e a I.17 poderiam ser pospostas, mais ainda, para o terceiro livro. Finalmente, a I.4 poderia anteceder a I.1 e, portanto, ser a primeira proposição dos *Elementos*, mas não poderia ser posposta, dado que é utilizada pela I.5 (a menos que a posição desta também fosse alterada, e assim sucessivamente). Casos como estes não são exceção, mas muito comuns nos *Elementos*;[17] e o que podemos extrair deles é que a ordem euclidiana, rigorosamente respeitada por Euclides (e por Clavius), exige que uma proposição não utilize conhecimentos posteriores, mas apenas os anteriores. Por outro lado, haveria certo espaço para manobra ou manejo entre as proposições, de sorte que, sem romper com tais exigências lógicas, determinado livro poderia ter uma configuração ligeira ou até acentuadamente diferente. Assim, a noção de ordem determina critérios mínimos de ordenamento,

16 Outros exemplos serão fornecidos mais adiante.

17 Como veremos mais adiante, o Livro V e os livros aritméticos, dada a sua autonomia, permitiriam alterações ainda mais radicais.

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

mas não fixa necessariamente certa proposição em determinado local nem torna absolutamente rígida e estática a complexa estrutura dos *Elementos*.[18]

Pode-se notar, além disso, a inexistência de algum tipo de linearidade demonstrativa entre proposições.[19] Duas proposições, como, por exemplo, a Prop. I.10 e a Prop. I.11, são utilizadas, respectivamente, nas I.12, I.16, I.42, II.5, II.6, II.9 e nas I.13, 1.46, I.48, II.1, II.9, de modo que elas "percorrem" caminhos distintos, entrecruzando-se a todo momento até se encontrarem em II.9 (e, assim, várias outras vezes, até pelo menos a Prop. VI.13). Tampouco é possível, por critérios lógicos ou dedutivos, estando o leitor (ou o autor) em determinada proposição, determinar ou antecipar qual deva ser necessariamente a próxima: assim, por exemplo, "a sequência de construções I.9-12 não tem nenhuma real necessidade lógica ou geométrica", podendo as quatro proposições "ter sido resolvidas em qualquer ordem" (Muller, 1981, p. 20).[20] De forma análoga, não há razões lógicas que impeçam a antecipação de determinada proposição que não utilize as imediatamente anteriores. Assim, continua Muller (1981, p.19), "se houver alguma razão de a I.29 seguir antes do que preceder a I.27 ou a I.28, é talvez porque a I.29 é a primeira invocação do postulado das paralelas" (Postulado 5), necessário às proposições imediatamente posteriores (a começar pela I.30 até a I.35, com exceção da I.31), de maneira que ela foi posta depois da I.27 e da I.28 para ficar mais próxima das que a utilizam. Há, além disso, proposições utilizadas apenas bem posteriormente ao seu aparecimento, de sorte que Euclides não deriva delas as que lhes seguem nem imediata nem proximamente: a I.14, por exemplo, é utilizada pela primeira vez na I.45, e a I.21, apenas na III.8; a I.25, por sua vez, jamais é utilizada, como é o caso da metade das proposições dos Livros II e IV e várias das que compõem o Livro III.[21] E, portanto, a cadeia de proposições seguida pelo Livro I (e pelos demais),

18 Isso significa que, não sendo suficiente o critério lógico, Euclides deve ter utilizado outros critérios para a organização de determinado livro, como, por exemplo, a constituição histórica de seu conteúdo.

19 Por vezes, parece se aceitar que toda proposição como que deva ter tido seu lugar e seu conteúdo determinados pela(s) proposição(ões) imediatamente anterior(es) e deva determinar as imediatamente seguintes, organizadas como se fossem elos de uma corrente.

20 Tendo exposto as três primeiras proposições do Livro I, que tipo de necessidade teria percebido Euclides para expor, em seguida, a quarta proposição, dada a sua independência em relação às anteriores? Talvez apenas para seu uso posterior; portanto, a Prop. I.4 não decorre das anteriores. E que ordem governa as Prop. II.1, II.2, II.3 e II.4, dependentes apenas de proposições do Livro I? E no caso das Prop. III.5 e III.6, que só dependem de postulados e axiomas?

21 Da mesma forma, a Prop. I.40 jamais é invocada nos *Elementos*, e a I.39 não é utilizada até a VI.2. Pro-

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

embora bastante "natural", não é a única possível:[22] "dizer que a posição de uma proposição é natural não é negar que alguma outra posição poderia não sê-lo tão igualmente", de modo que não se pode afirmar que "o autor do Livro I não poderia ter encontrado alguma outra prova da I.45 utilizando diferentes proposições" (Muller, 1981, p. 18).[23] Mesmo assim, a estrutura dedutiva do Livro I encontra-se melhor assentada do que a dos três imediatamente seguintes, organizados de modo "mais livremente" e não tendo como principal critério a relevância dedutiva[24].

A noção de ordem, portanto, é mais fraca e menos exigente do que as de "relevância dedutiva" e de "desenvolvimento dedutivo", caracterizadas por Muller e por outros especialistas preocupados com a avaliação do sistema e da estrutura axiomática dos *Elementos*.[25] Estas últimas noções, além de levarem em conta, evidentemente, o respeito à ordem, tratam da obra sob o ponto de vista do melhor e mais econômico sequenciamento das proposições, de modo que a sua estrutura é avaliada, diferentemente do que pretendemos aqui, principalmente conforme o critério de dependência lógica e da sequência dedutiva. Tratar da ordem, da forma ora caracterizada, é algo distinto: a ordem se restringe à exigência de que uma proposição se fundamente apenas em proposições anteriores,[26] sem que necessariamente sejam *imediatamente* anteriores, não havendo problema algum se outras estejam intercaladas entre elas. Assim, a ordem permite, por exemplo, o entrecruzamento de dois sequenciamentos paralelos.

---

posições como a I.40, por não se encaixarem na cadeia de dependência lógica, têm sido por vezes consideradas interpolações.

22 Muller defende que a Prop. I.45 seja o ponto alto do Livro I: "Eu tentei mostrar que a estrutura do Livro I é largamente determinada por essa cadeia, a qual, embora não seja a única sequência possível até I.45, é uma sequência natural" (Muller, 1981, p. 26).

23 Para uma discussão da estrutura dos *Elementos*, cf. Muller (1981); uma tabulação dos quatro primeiros livros se encontra em Neuenschwarder (1973). Agradeço ao Luciano C. Utteich pelo auxílio na leitura deste último artigo, publicado em língua alemã.

24 Os outros três livros do primeiro grupo evidenciam isso: "pouca atenção é dada à sequência lógica", conclui Muller, em setores dos Livros III e IV, havendo uma "grande liberdade de jogo no desenvolvimento dedutivo", de modo que "Euclides claramente pensa o conteúdo como mais importante princípio de organização do que a relevância dedutiva – um fato que torna difícil ler os *Elementos* em continuidade" (Muller, 1981, p. 204).

25 Muller, por exemplo, tem por principal objetivo comparar os *Elementos* com a estrutura da geometria apresentada por Hilbert nos *Fundamentos da geometria*, de 1899.

26 Como veremos em seguida, somente na medida em que a proposição exigir.

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

Além disso, como a I.4 evidenciou, certas proposições podem ser absolutamente independentes, não fazendo uso, portanto, de nenhuma proposição anterior. Se, de sua parte, a I.47 faz uso de meia dúzia de proposições anteriores, há muitas outras que utilizam bem menos proposições ou, mesmo, há várias que não fazem uso de nenhuma delas. Assim, ao critério de ordem dado anteriormente, podemos (e devemos) acrescentar mais uma característica: uma proposição euclidiana só utiliza conhecimentos anteriores *na medida de sua necessidade*, por vezes não tendo necessidade de nenhum.[27] A independência, contudo, não fere o critério da ordem: uma proposição utiliza apenas o que vem antes e na medida de sua necessidade, nada utilizando, porém, caso não seja preciso.[28]

Esse critério de constituição da ordem dos geômetras, na verdade, atua já na primeira frase dos *Elementos*, súbita e laconicamente introduzida por Euclides. Ora, se a definição de ponto ("Ponto é aquilo de que nada é parte" (Euclides, 1956, 1, p. 153; 2009, p. 97)) não pressupõe conhecimentos anteriores de espécie alguma, devemos reconhecer que *ela utiliza tudo e apenas o que precisa*; como de nada carece, nada utiliza. Assim, desde as definições, a ordem prescreve que se utilizem conhecimentos anteriores proporcionalmente ao que for preciso e no limite do que for preciso, de sorte que os conhecimentos auto evidentes não fazem uso de nenhum deles em razão exatamente de sua auto evidência. Algo paralelo ocorre com as proposições (e livros, como veremos) independentes.[29]

27 Como dito anteriormente, a Prop. I.4 utiliza apenas "princípios primeiros". Outros exemplos de proposições independentes são as Prop. III.5 e III.6 e as Prop. V.1; V.2, V.7, V.11 e V.13.

28 Uma proposição, não necessitando de nenhuma anterior, não seria um primeiro princípio? Um princípio é autoevidente e geral, enquanto uma proposição, além de se referir a algo específico (a uma configuração específica), faz uso deles e necessita de uma prova.

29 É possível levarmos mais adiante essa reflexão sobre a noção de ordem (cujo desenvolvimento, contudo, ficará para outra oportunidade). Utilizar-se apenas do *necessário* não é uma medida que diga respeito exclusivamente à economia estilista de um escrito (visto que, não a tendo, se poderia, por exemplo, inflá-lo com conhecimentos prévios "inúteis"), mas é um critério que denuncia o *lugar* a partir do qual a ordem é constituída: se uma proposição só utiliza o que necessita, havendo uma desproporção entre o conhecimento anterior disponível e o que ela exige, a ordem é constituída fundamentalmente a partir da proposição e retrospectivamente, uma vez que é ela que "seleciona" o que precisa. Dado o caráter de superabundância dos conhecimentos disponíveis, cabe à proposição denunciar suas necessidades e indicar seus fundamentos. Assim, a ordem não é um desdobramento ou processo de extração de um conhecimento novo a partir do anterior: não é a proposição

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

Essa autonomia, entretanto, não é uma particularidade apenas de certas proposições, e a noção de ordem precisa ser analisada desta vez na relação entre os livros. O caso a ser explorado concentra-se no Livro V, livro que nos será importante também por outras razões. Como é sabido, há duas teorias das proporções nos *Elementos*, uma no Livro V, para as grandezas contínuas, divisíveis ao infinito, e outra no Livro VII, para os números inteiros, e, portanto, a primeira sendo uma teoria geral e a outra apenas uma teoria das proporções numéricas.[30] Essa duplicidade de tratamento da proporcionalidade tem sido objeto de discussão ao longo dos séculos e tem dado ensejo a inúmeras hipóteses a respeito da gênese dos *Elementos* e das razões de Euclides ter conservado duas teorias que se sobrepõem, bem como a proposta, como veremos em seguida – e é o caso de Clavius –, de antecipar temas do Livro VII para o Livro V.[31] Além disso, a teoria das proporções numéricas, atribuída aos pitagóricos, pelo que tudo indica, antecede historicamente a teoria geral, atribuída a Eudoxo, contrariamente à exposição nos *Elementos* (que apresenta a geral antes da mais restrita), cujo arranjo e sequenciamento é de responsabilidade do próprio Euclides.[32]

---

anterior A que denuncia a proposição posterior B, mas é a proposição B que, necessitando de A, clame por ela. Por aqui já se vê que não é a ordem que constitui a essência mesma de um "método de descoberta".

30 Cf. alguns testemunhos dentre tantos: "O Livro V trata da teoria das proporções enquanto aplicada às magnitudes em geral" (Cajori, 1909, p. 44); "É preciso assinalar, com efeito, que há duas teorias das proporções nos *Elementos*, uma no Livro V para as grandezas geométricas contínuas, isto é, divisíveis ao infinito, como as linhas, as superfícies e os volumes, ou ainda os tempos, os sons, etc., e a outra no Livro VII, para os números inteiros (Rommevaux, 2005, p. 10); "No Livro V é exposta a teoria das *proporções* de Eudóxio, cujos resultados se aplicam a todas as grandezas, sendo, portanto, verdadeiros tanto para os *números* como para as *grandezas geométricas*. Antes dos trabalhos de Eudóxio, a teoria das proporções era estabelecida apenas dum modo irrefutável para as relações entre grandezas *comensuráveis*, motivo por que (a incomensurabilidade, representando ainda grave escolho para os geômetras) os seus precursores baniram sistematicamente a noção de *razão* das demonstrações dos quatro primeiros livros" (Loureiro e Vasconcellos, 2009, p. 221).

31 A proposta de Clavius não é a de eliminar o Livro VII: tendo desenvolvido longas reflexões, no Livro V, sobre a teoria das proporções, ele, por assim dizer, mostra como este livro antecipa aquele. Discute-se até que ponto Clavius promove, no final, uma "aritmetização" do Livro V. Certo é que ele insere longas reflexões no interior desse livro, os comentários sobre a Def. V.4 se estendendo por cem páginas (Clavius, 1606, p. 353-454).

32 O Livro VI faz amplo uso da teoria do Livro V, utilizada também no Livro X e nos posteriores. Ela é uma das teorias mais centrais da geometria antiga, tendo emergido certamente em razão da descoberta dos irracionais, e foi vista pelos medievais e modernos como fundamental, até desaparecer quase que completamente com a emergência da geometria analítica.

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

Destaquemos apenas alguns elementos que nos são relevantes. O primeiro deles é que, tendo sido introduzida a teoria geral das proporções no Livro V, Euclides não poderia ter feito – e não fez – uso dela nos livros anteriores, não havendo, portanto, nada concernente a questões relativas à proporcionalidade nos quatro primeiros livros. Isso quer dizer que, por mais que haja proposições, nesses livros, que poderiam ter sido abordadas por meio de proporções, fato é que elas não o foram. Nesse sentido, em obediência ao percurso lógico seguido na obra toda e, portanto, conforme sua noção de ordem, Euclides não poderia ter apresentado a teoria das proporções depois de sua utilização ou, então, não poderia tê-la utilizado antes de sua introdução. Caso assim tivesse procedido, teria se utilizado de um conhecimento introduzido posteriormente, contrariando a regra de ordenamento que prescreve que se deva de antemão expor os fundamentos do conhecimento para em seguida utilizá-lo. Outra questão é saber as razões pelas quais Euclides manteve os primeiros livros alheios à teoria das proporções, visto que poderia tê-la utilizado no tratamento de muitas de suas proposições. Heath, ao mesmo tempo em que cita a Prop. I.44 como exemplo de uma proposição que poderia ter incorporado o uso das proporções, afirma que há certamente componentes históricos que influenciaram a decisão, e sugere que Euclides tenha querido conservar pesquisas realizadas no período entre Pitágoras e Eudoxo, quando da "passagem" da teoria numérica (Livro VII) para a geral (Livro V), em razão da descoberta dos incomensuráveis (Heath, 1956, 2, p. 113).[33] Resultados dessas pesquisas sem o uso da teoria das proporções teriam sido preservados intencionalmente nos primeiros quatro livros dos *Elementos*.[34]

Um segundo aspecto que interessa destacar é o *status* de independência do Livro V frente aos livros anteriores: embora faça uso das noções comuns do Livro I, o Livro V em nada depende dos quatro primeiros e, evidentemente, tampouco dos posteriores. Essa sua autonomia é algo reconhecido e afirmado pelos especialistas: o Livro V, afirma Joyce, "de nenhuma maneira

33 Segundo Muller, a protelação da introdução do conceito de proporcionalidade pode ter sido em função da complexidade do tratamento dado por Eudoxo. Além disso, embora seja "difícil entender por que Euclides deva ter escolhido provar uma proposição sem usar tal conceito, quando poderia dar uma prova mais simples e mais manifesta", tê-lo evitado "é um importante fator na estrutura dos primeiros quatro livros dos *Elementos*" (Muller, 1981, p. 204).

34 "Esta é provavelmente uma das razões pela quais proporções e similitudes são pospostas para até tão tarde quanto são os Livros V e VI" (Heath, 1956, 2, p. 113).

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

depende de qualquer um dos livros anteriores" (Joyce, 1998, L. V),[35] tendo algumas de suas proposições completa independência também entre si.[36] Por sua vez, Muller afirma que as Prop. V.1, V.2, V.3, V.5 e V.6 "não dependem de nada exceto do entendimento que Euclides tem da natureza das magnitudes e das operações sobre elas. As outras proposições do Livro V dependem, em última análise, sobre uma ou ambas das definições fundamentais [desse livro]" (Muller, 1981, p. 125). Dentro dessa mesma linha de raciocínio, Neuenschwarder (1973, p. 334-8) apresenta uma tabela completa do uso de cada proposição dos quatro primeiros (restrita aos seis primeiros livros) e mostra que nenhuma proposição dos Livros I-IV foi utilizada no Livro V. Ora, se isso é assim, poder-se-ia permutar o Livro V com os anteriores, alterando o ordenamento entre eles, ou, então, poder-se-ia remodelar, reorganizar, enfim, reescrever, por exemplo, parte do Livro I a partir da teoria das proporções. Muito embora isso permaneça apenas no âmbito da possibilidade e ainda que isso seria algo que faria dos *Elementos* uma obra "diferente", certo é o fato de que, emergindo apenas no Livro V, o tema das proporções foi utilizado somente a partir de então. E assim procederam Euclides e Clavius, nenhum deles cometendo algum tipo de circularidade ou erro quanto à ordem.[37]

---

35 Na ausência de um melhor indicador de localização das citações feitas desta obra (disponível *on-line*), será indicado o livro ou a proposição a que cada uma delas se refere. Em geral, os comentários vêm em seguida ao texto de Euclides a que eles se referem.

36 Evidentemente, neste caso, a Prop. V.1 deve ser independente das demais, anteriores e posteriores, algo que se aplica também a outras. Se Descartes, como diz Gueroult (1953, 1, p. 11), "tem um verdadeiro horror de 'pensamentos soltos'", a ordem não dá conta, ao contrário do que pensa o intérprete cartesiano, das amarras e do entrelaçamento que existem entre eles em determinada obra.

37 A independência do Livro V é revelada também pela "percepção" da necessidade ou da possibilidade da introdução de novos postulados e de noções comuns, como acontece com edições da época de Descartes, algo que ocorre também no Livro VII e no Livro X. Clavius introduz um axioma no Livro V, dois postulados e 12 axiomas no Livro VII, um postulado e dois axiomas no Livro X, enquanto Commandino introduz quatro axiomas no Livro V, três postulados e 13 axiomas no Livro VII, e quatro axiomas no Livro X. Os livros aritméticos (VII-IX) também gozam de autonomia em relação aos demais: desenvolvidos seus temas "em um quase completo isolamento do restante dos *Elementos*", na verdade "a dependência dos Livros VII-IX em relação aos anteriores é ainda mais tênue", de modo que não é "implausível considerar os livros aritméticos como um texto de fundação, o análogo aritmético do Livro I" (Muller, 1981, p. 58). E, portanto, algo semelhante ao que foi dito anteriormente em relação ao Livro V poderia valer igualmente para tais livros, em especial para o Livro VII.

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

Ora, disso tudo se conclui que haveria outras possibilidades de arranjo dos *Elementos*, seja no interior de um livro seja entre eles. Além disso, se há uma noção de ordem nos *Elementos* – sempre lembrando que Euclides não emprega esse termo –, ela não pode estar vinculada a um sequenciamento lógico-dedutivo rigoroso e ininterrupto de proposições, no sentido de que cada proposição esteja intimamente ligada à imediatamente posterior e seja decorrente da anterior. A noção de ordem deve ter um sentido, ao contrário, que contemple a falta de linearidade, a existência de proposições e de livros independentes e a possibilidade de seu deslocamento, bem como a quebra ou interrupção de certo movimento demonstrativo por proposições cuja razão de sua presença não decorre das anteriores. Haveria, mesmo assim, uma noção de ordem, definida pela obediência ao critério de que uma proposição se fundamente tão só e exclusivamente no que vem antes segundo a sua necessidade, sem jamais utilizar o que vem posto depois.

Nesse sentido, parece-nos plenamente adequada a noção de "ordem dos geômetras", apresentada por Descartes. Quanto ao "modo de escrever dos geômetras", diz ele, há duas coisas a serem consideradas, a "ordem" e a "maneira de demonstrar", e a "ordem consiste apenas em que as coisas propostas primeiro devem ser conhecidas sem a ajuda das seguintes, e que as seguintes devem ser dispostas de tal forma que sejam demonstradas só pelas coisas que as precedem" (Descartes, 1983b, p. 166; AT, 7, p. 155; AT, 9-1, p. 121). Por isso, afirma ele, "tendo procurado nada escrever neste tratado [nas *Meditações*] de que não tivesse demonstrações muito exatas, vi-me obrigado a seguir uma ordem semelhante àquela de que se servem os geômetras, a saber, adiantar todas as coisas das quais depende a proposição que se busca, antes de concluir algo dela" (Descartes, 1983a, p. 79; AT, 7, p. 12-3; AT, 9-1, p. 9). E, portanto, é plenamente adequada aos *Elementos* a definição de ordem atribuída por Descartes aos geômetras gregos e seguida por ele; é pertinente avaliar a obra euclidiana a partir dessa noção: um determinado conhecimento não pode depender do que vem depois dele, mas apenas do que vem antes, na medida do necessário.

Agora, se a noção de ordem se define por essa exigência mínima, ela não esgota, evidentemente, o modelo epistêmico apresentado pela estrutura axiomática dos *Elementos* nem exclui a possibilidade de alguém configurar uma noção de ordem mais "encorpada" e mais rica dessa de inspiração cartesiana. Ao atribuir ordem indiscriminadamente aos escritos dos geômetras gregos, Descartes, por outro lado, sabe muito bem que isso que estamos analisando nos *Elementos*, a ordem, é apenas uma das condições de todo conhecimento; e, por isso, procede ele à distinção entre "ordem" e "maneira de demonstrar" (ou método), reservando à "maneira de demonstrar"

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

todo o conjunto de elementos próprios e fundamentais à produção do conhecimento.[38] Em outras palavras, a ordem é apenas um dos elementos que compõem a configuração do que constitui o sistema axiomático expresso nos *Elementos*, e é apenas nesse quesito que estamos equiparando a postura cartesiana com a euclidiana. Ademais, ordem não é sinônimo de axiomática em Euclides, sendo preciso ter o cuidado de nela não inserir outras noções epistêmicas.[39] E, assim, não podendo ser entendida como sinônima de método em nenhum dos autores, Descartes e Euclides respeitam a mesma ordem, porém não seguem, de modo algum, o mesmo método.[40]

Uma última observação a respeito. Dentre os marcadores da noção de ordem apresentados anteriormente não aparece explicitamente, na definição cartesiana, o que diz respeito ao fato de ela fazer uso de conhecimentos anteriores *apenas na medida de sua necessidade*. A definição cartesiana, contudo, contém implicitamente essa consideração: a ordem não exige que as coisas propostas posteriormente devam fazer uso de *todas* as anteriores, algo que a tornaria absolutamente rígida e inflexível (se não impraticável); se as anteriores são "conhecidas sem a ajuda das seguintes" (Descartes, 1983b, p. 166; AT, 7, p. 155; AT, 9-1, p. 121), as posteriores podem, ao contrário, *contar com a ajuda das anteriores* e somente delas, estando estas disponíveis quando lhes for solicitado. É assim que age Euclides, sendo oportuno observar que uma proposição pode ocasionalmente pedir ajuda apenas aos primeiros princípios sem intervenção de proposições que a antecedem. O próprio Gueroult caracteriza a ordem cartesiana fora de um modelo estrito de linearidade e de rigidez estrita, o que implica o emprego do *uso seletivo* dos conhecimentos anteriores.[41]

38 Toda a força da reflexão cartesiana está na distinção entre análise e síntese e na caracterização da análise como "maneira de demonstrar" que "mostra o verdadeiro caminho pelo qual uma coisa foi metodicamente descoberta" (Descartes, 1983b, p. 166; AT, 7, p. 155; AT, 9-1, p. 121). Em outras palavras, a análise alia descoberta com demonstração, ao contrário da síntese demonstrativa, de onde vem a admiração cartesiana pela primeira e o desprezo pela segunda.

39 Assim, a noção de ordem não inclui a noção de demonstração nem o conjunto dos elementos que configuram seu "modo de operar", tampouco quais são as partes de uma proposição, quando um teorema está suficientemente provado ou um problema resolvido, nem esclarece a natureza e a atuação dos primeiros princípios. Ela tampouco permite saber, a partir de uma proposição, qual será ou deva ser a seguinte.

40 Como é amplamente sabido, Descartes segue o "modo de demostrar" analítico e Euclides, o modo sintético (Descartes, 1983b, p. 166-7; AT, 7, p. 155-8; AT, 9-1, p. 121-2).

41 Afirma Gueroult (1953, 2, p. 278): "Contrariamente a uma opinião muito disseminada, essa ordem não

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

2 O teorema de Pitágoras

O Livro I dos *Elementos*, como afirmado anteriormente, é composto de 48 proposições, correspondendo o famoso teorema de Pitágoras à sua proposição 47 e ao seu teorema de número 33. Embora a literatura antiga não nos permita concluir com certeza, tem-se admitido em geral que uma primeira prova do teorema tenha sido proposta pelo próprio Pitágoras (ou pelos pitagóricos), razão pela qual tem sido assim denominado. Essa posição, contudo, não é unânime, e alguns especialistas têm preferido se abster de posições categóricas a esse respeito. Sabe-se que alguma versão dele já era conhecida e utilizada muito tempo antes por outras civilizações, ainda que certamente sem a universalidade que ele terá nos *Elementos*. A ausência de registros conclusivos tampouco tem permitido às pesquisas confluírem quanto ao teor e à forma da(s) prova(s) que teria(m) chegado às mãos de Euclides, não possibilitando, com isso, uma avaliação segura sobre a autoria euclidiana da prova dada nos *Elementos*. Como estimam W. Knorr (1973, p. 21; p. 178-9; p. 204-5, n. 18) e I. Muller (1981, p. 172; p. 176, n. 23), contrariamente à leitura dominante,[42] o próprio Proclus mostra-se um tanto reticente em suas observações, não assumindo claramente a tese da origem pitagórica do teorema e tampouco a originalidade euclidiana da Prop. I.47. Assim, a inexistência de informações históricas suficientes não possibilita a afirmação de conclusões definitivas, seja a respeito da contribuição pitagórica, seja a respeito da originalidade da prova euclidiana, seja ainda a respeito das semelhanças entre

é unilinear. As razões não são dispostas de uma extremidade a outra como pérolas num colar. Descartes não nos fala simplesmente de uma *series*, mas de um *nexus rationum*".

42 Essa é a posição, por exemplo, de T. Heath (1981, 1, p. 378; 1956, 1, p. 351-ss). Heath, apoiando-se em certa leitura do texto de Proclus, não vê razões suficientes para negar que tenha sido de Pitágoras uma primeira prova geral do teorema, provavelmente tendo por base uma teoria das proporções (certamente não a geral, do Livro V, de autoria de Eudoxo), o que, por sua vez, garante, em boa medida, a originalidade da I.47, visto que esta última não faz uso de nenhuma espécie de proporcionalidade. Segundo essa interpretação, é provável que versões mais antigas do teorema se apoiavam em uma teoria das proporções restrita (numérica, tal como a do Livro VII dos *Elementos*), podendo ter sido suplantada por uma prova elaborada a partir da teoria geral do Livro V. A dificuldade, nesse caso, é saber por que razão Euclides apresenta uma prova sem o uso dessas teorias. Teria querido ele separar, em razão da estrutura da obra, os quatro primeiros livros dos posteriores ou teria querido ele conservar uma prova e uma tradição pré-existentes? Segundo Zeuthen (1902, p. 89), a teoria de Eudoxo sobre as proporções era ainda demasiadamente nova na época de Euclides para "ser alocada no início do sistema", razão pela qual foi relegada para o Livro V.

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

a proposição dos *Elementos* e provas anteriormente existentes e, portanto, de quanto Euclides deve a seus antecessores.[43]

Está assegurada, porém, a identificação do teorema de Pitágoras com a Prop. I.47. Talvez alguém pudesse querer questionar essa identidade, visto que Euclides não a nomeia como tal e dado que seja possível derivar o teorema de outras proposições dos *Elementos*. Não há dúvidas, contudo, quanto a isso: desde os antigos até hoje, sem exceção a nosso conhecimento, tratar do teorema de Pitágoras é tratar da Prop. I.47, algo reconhecido explicitamente pelo próprio Gueroult (1953, 1, p. 61, n. 27).[44] Essa identificação é fundamental, pois, como Gueroult se refere nominalmente ao teorema, a sua localização nos permite identificá-lo com clareza e determinar precisamente a sua configuração dentro dos *Elementos*.[45]

Segue a Prop. I.47 segundo a tradução dos *Euclidis Elementorum libri XV*, de Clavius (cf. Fig. 1):[46]

---

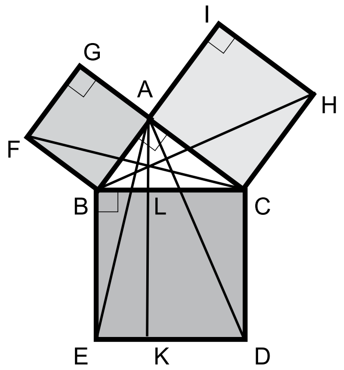
43 O *Comentário sobre o Primeiro Livro dos Elementos de Euclides*, de Proclus, é a principal fonte a respeito. Em suas considerações sobre a Prop. I.47 (Proclus, 1992, p. 426-9), ele se refere à tradição que atribui o teorema a Pitágoras e que afirma ter ele sacrificado um boi (por vezes, fala-se de cem bois) em razão da sua suposta descoberta. Em seguida, confessa sua admiração por Euclides em razão da lucidez demonstrativa da sua prova e tece comparações entre a Prop. I.47 e a Prop. VI.31, esta última consistindo na generalização do teorema para figuras semelhantes e semelhantemente descritas sobre os lados do triângulo retângulo (Proclus, 1992, p. 426-7). É o teor dessas considerações, ao lado de outras informações dadas pelos antigos, que alimenta o debate sobre a origem pitagórica do teorema, sobre a originalidade euclidiana e sobre a semelhança entre as provas.

44 A identidade entre o teorema de Pitágoras e a Prop. I.47 é admitida explicitamente por Gueroult em outro momento de sua obra, ocasião em que ele o indica com a paginação exata da proposição conforme a tradução de Clavius. É esse mesmo texto, extraído do mesmo local (Clavius, 1607, 1, p. 147-8), que será examinado abaixo. Diz Gueroult: "temos, então, o teorema de Pitágoras. Cf. Clavius, *Elementa* de Euclides, Frankfurt, 1607 (L. I, Prop. 47, teor. 33-34, p. 147-8 (...))" (Gueroult, 1953, 1, p. 61, n. 27).

45 Cf., a seguir, alguns autores que, com "naturalidade", identificam o teorema de Pitágoras com a Prop. I.47: Heath (1956, 1, 351-ss; 1981, 1, 144; 378), Knorr (1973, p. 21; 204-5), Boyer (1974, p. 79), Muller (1981, p. 26-7; 45), Loureiro e Vasconcellos (2009, p. 22), Silva (2014, p. 21), dentre outros.

46 Clavius altera algumas letras da figura em relação ao correspondente grego e a outras edições. O texto, além disso, contém pequenas alterações e alguns acréscimos, mas eles não comprometem, em nada, a natureza da prova. Agradeço ao Ademir Menin e ao João A. Braun pelo auxílio na tradução do texto latino para o português, e ao Renato F. Merli pela confecção desta e das demais figuras utilizadas no artigo.

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014



Teorema 33 - Proposição 47

Nos triângulos retângulos, o quadrado que é descrito sobre o lado que subtende o ângulo reto é igual aos quadrados que são descritos sobre os lados que contêm o ângulo reto.

No triângulo ABC, seja reto o ângulo BAC e sejam descritos sobre AB, AC, BC os quadrados ABFG, ACHI, BCDE [I.46].[47]

Digo que o quadrado BCDE, descrito sobre o lado BC, que é oposto ao ângulo reto, é igual aos dois quadrados ABFG, ACHI, os quais são descritos sobre os outros dois lados, sejam estes dois lados iguais sejam eles desiguais.

Fique, então, traçada a reta AK, paralela tanto à BE quanto à CD [I. 31], cortando BC em L, e sejam tiradas as retas AD, AE, CF, BH. E, como os dois ângulos BAC, BAG são retos, as retas GA, AC formarão uma linha reta; e, do mesmo modo, IA, AB serão uma linha reta [I.14]. Além disso, como os ângulos ABF, CBE são iguais, pois ambos são retos, se for adicionado o ângulo comum ABC, o ângulo CBF todo será igual ao ângulo ABE todo; e, de modo semelhante, o ângulo BCH todo será igual ao ângulo ACD todo [N. C 2]. Por conseguinte, visto que os dois lados AB, BE do triângulo ABE são iguais aos dois lados FB, BC do triângulo FBC, cada um com cada um, como é estabelecido pela definição de quadrado, e são também iguais os ângulos ABE e FBC, contidos, como mostramos, por esses lados iguais, os triângulos ABE, FBC serão iguais [I.4]. Agora, o quadrado ou paralelogramo ABFG é o dobro do triângulo FBC, pois estão entre as paralelas FB, CG e sobre a mesma base BF [I.41]. E o paralelogramo BEKL é o dobro do triângulo ABE, os quais estão entre as paralelas as BE, AK e sobre a mesma base BE. Por isso, serão iguais o quadrado ABFG e o paralelogramo BEKL [N. C. 6][48]. Pelas mesmas razões se compreende que são iguais o quadrado ACHI e o paralelogramo CDKL [I.4]. Com efeito, como, de sua parte, os triângulos ACD, HCB são iguais, da mesma forma serão evidentemente iguais os seus dobros, o paralelogramo CDKL e o quadrado ACHI. É por essa razão que o quadrado BCDE todo, que é composto pelos dois paralelogramos BEKL, CDKL, é igual aos dois quadrados ABFG, ACHI.

47 As informações entre colchetes aparecem à margem do texto de Clavius; em geral fornecidas pelas diferentes edições dos *Elementos* (mas ausentes na edição brasileira), elas indicam as proposições e primeiros princípios utilizados na demonstração.

48 Trata-se da Noção Comum 5 das traduções mais atuais baseadas na edição de Heiberg e Stamatis (1969-1977).

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

> Portanto, nos triângulos retângulos, o quadrado etc. O que era para ser demonstrado (Clavius, 1607, 1, 147-8).[49]

O teorema de Pitágoras (Prop. I.47) pode ser sintetizado nos passos apresentados a seguir. Uma vez descritos os três quadrados[50] sobre os três lados do triângulo retângulo ABC e traçadas as várias linhas conforme a figura, segue-se que o ângulo ABE é igual ao ângulo FBC, visto que ambos são formados por um ângulo reto e pelo mesmo ângulo ABC.[51] Disso conclui-se que o triângulo ABE é igual ao triângulo FBC, dado que os dois lados AB, BE são respectivamente iguais aos dois lados FB, BC, e o ângulo ABE é igual ao ângulo FBC.[52] Por sua vez, o paralelogramo BK é o dobro do triângulo ABE,[53] pois eles têm a mesma base BE e estão nas mesmas paralelas BE, AK; e, pela mesma razão, o quadrado BG é o dobro do triângulo FBC, uma vez que eles têm a mesma base FB e estão nas mesmas paralelas FB, CG. Assim, o paralelogramo BK é igual ao quadrado BG, pois ambos são, respectivamente, o dobro dos triângulos ABE, FBC, iguais entre si. Por um raciocínio análogo, segue-se que o ângulo ACD é igual ao ângulo HCB e que o triângulo ACD é igual ao triângulo HCB. Por sua vez, o paralelogramo CK é o dobro do triângulo ACD; e, pela mesma razão, o quadrado CI é o dobro do triângulo HCB. Assim, o paralelogramo CK é igual ao quadrado CI. Portanto, o quadrado sobre o lado BC é igual à soma dos

---

49 Cf. tb. Euclides (1956, 1, p. 349-350; 2009, p. 132-3). Uma primeira tradução portuguesa, feita por Angelo Brunelli, de parte dos *Elementos* (Livros I-VI, XI e XII), tendo por base a tradução latina de Federico Commandino e notas de Robert Simson (1687-1768), foi publicada em 1768, com várias reedições nos séculos XVIII e XIX.

50 A construção dos quadrados é fornecida por I.46: "Descrever um quadrado sobre uma reta dada" (Euclides, 1956, 1, p. 347-8; 2009, p. 132).

51 A igualdade entre os dois ângulos é garantida pela Noção Comum 2: "Se iguais forem adicionados a iguais, os todos serão iguais" (Euclides, 1956, 1, p. 155; 2009, p. 99).

52 Passos garantidos pela proposição I.4: "Caso dois triângulos tenham, respectivamente, os dois lados iguais aos dois lados, e tenham o ângulo contido pelas retas iguais igual ao ângulo, eles também terão a base igual à base, e o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um com cada um, sob os quais se estendem os lados iguais" (Euclides, 1956, 1, p. 247-8; 2009, p. 101-2). Podemos perceber as várias igualdades afirmadas por Euclides, se girarmos o triângulo FBC, no sentido horário, até que o ponto F coincida com o ponto A.

53 Essa inferência e a seguinte se baseiam na proposição I.41: "Caso um paralelogramo tenha a mesma base que um triângulo e esteja nas mesmas paralelas, o paralelogramo é o dobro do triângulo" (Euclides, 1956, 1, p. 338; 2009, p. 128).

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

quadrados sobre os lados BA, AC, dado que o quadrado sobre BC é igual aos paralelogramos BK, CK, ambos iguais, respectivamente, aos quadrados BG, CI.[54]

Quadro 1 – Principais passos demonstrativos da Prop. I.47

Esquema dos principais passos da demonstração da Prop. I.47	
Para que: paralelogramo BK = quadrado BG:	Para que: paralelogramo CK = quadrado CI:
1) Ângulo ABE = ângulo FBC; 2) Triângulo ABE = triângulo FBC; 3) Paralelogramo BK = dobro triângulo ABE; 4) Quadrado BG = dobro triângulo FBC; 5) Paralelogramo BK = quadrado BG;	6) Ângulo ACD = ângulo HCB; 7) Triângulo ACD = triângulo HCB; 8) Paralelogramo CK = dobro triângulo ACD 9) Quadrado CI = dobro triângulo HCB; 10) Paralelogramo CK = quadrado CI;
11) Paralelogramo BK + Paralelogramo CK = quadrado BG + quadrado CI; 12) Quadrado sobre BC = quadrado sobre AB + quadrado sobre AC.	

Como se pode ver, o teorema de Pitágoras faz uso *apenas* de proposições, noções comuns, postulados e definições de antemão expostas no Livro I. Em ordem decrescente, ele se baseia nas proposições I.46, I.41, I.31, I.30, I.14 e I.4. Além das várias definições utilizadas, ele faz uso também, conforme as edições atuais, dos postulados 1, 4 e 5 e das noções comuns 1, 2 e 5. A Prop. I.47, portanto, como as demais proposições dos *Elementos*, respeita rigorosamente o critério da ordem cartesiana (e euclidiana): *uma proposição (e mesmo os primeiros princípios) só deve(m) fazer uso de conhecimentos dados precedentemente, segundo sua necessidade*. Ela não faz uso, portanto, de conhecimentos apresentados posteriormente, independentemente do livro

54 A proposição I.47 utiliza ainda, além de vários "princípios primeiros", a proposição I.14 e também as proposições I.30 e I.31, dadas, nesta mesma ordem, a seguir: I.14 –"Caso, com alguma reta ou no ponto sobre ela, duas retas não postas no mesmo lado façam os ângulos adjacentes iguais a dois retos, as retas estarão sobre uma reta, uma com a outra"; I.30 –"As paralelas à mesma reta são paralelas entre si"; I.31 –"Pelo ponto dado, traçar uma linha reta paralela à reta dada" (Euclides, 1956, 1, p. 276-7; 314; 315-6; 2009, p. 108-9; 121; 121).

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

e independentemente de outros tipos de relações que poderiam ser estabelecidas,[55] seguindo, nesse sentido, uma perspectiva implantada desde as primeiras linhas da obra. Além disso, como ela evidencia, uma proposição euclidiana não faz uso (não precisa fazer uso) de todas as proposições que vêm antes, de sorte que a totalidade delas não forma um encadeamento rígido, linear e rigorosamente sucessivo, como se fossem elos de uma corrente: uma vez as proposições não precisando fazer uso das anteriores (sejam próximas ou bem anteriores) senão apenas de acordo com sua necessidade, as relações de dependência entre elas tampouco têm padrões fixos, e suas "linhas de determinação" se entrecruzam de forma variada, originando percursos em geral sinuosos ou em ziguezague.

As proposições do Livro I tratam de temas variados, relativos a questões elementares de geometria plana. Heath (1981, 1, p. 376-8) as divide em três grupos. O primeiro (Prop. 1-26) lida principalmente com construções e operações sobre triângulos (sem o uso de paralelas), sobre retas perpendiculares, que se interceptam ou que são alteadas de um ponto de uma delas, formando ângulos suplementares. O segundo grupo (Prop. 27-32) apresenta a teoria das paralelas, cabendo à Prop. 32 a prova de que a soma dos três ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos. O terceiro grupo (Prop. 33-48) estuda relações entre áreas de paralelogramos, triângulos e quadrados, tendo como características principais o estabelecimento da equivalência entre (áreas de) figuras (sem o uso da noção de congruência, ao contrário do estudo dos triângulos no primeiro grupo) e o emprego da técnica de "aplicação de áreas". Em síntese, o Livro I ensina a construir triângulos, a acrescentar e a cortar segmentos de retas; trata

55 Euclides, entretanto, assume intuitivamente algo que provará mais tarde na Prop. II.2: que, se um quadrado (como o quadrado sobre BC) for dividido em dois retângulos (como os paralelogramos BK, CK), a soma desses dois retângulos é igual ao quadrado. Em geral não se tem avaliado como comprometedor o uso intuitivo desse conhecimento elementar (qual seja, um quadrado dividido em duas partes ser igual a essas partes), embora W. Knorr pense se tratar, aí, de um "notável defeito estilístico, se não [de] um erro lógico" (Knorr, 1973, 179). Heath, por outro lado, embora reconheça o uso do *fato* afirmado pela Prop. II.2, afirma não ter havido, ao longo da prova da Prop.I.47, ocasião "para observar que os dois retângulos BL, CL [no nosso caso, BK, CK] que formam o quadrado sobre BC sejam respectivamente os retângulos contidos por BC e pelas duas partes nas quais ele é dividido pela perpendicular de A sobre BC" (Heath, 1956, 1, p. 377), algo necessário para estabelecer a Prop. II.2. Seja como for, o conhecimento suposto por Euclides é absolutamente elementar. Além disso, a Prop. II.2 se baseia nas Prop. I.30, I.31 e I.46, todas anteriores à Prop. I.47, de sorte que a II.2 poderia ter sido introduzida como Lema da I.47.

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

da congruência (igualdade) entre triângulos; mostra como bissectar ângulos e retas; ensina a construir perpendiculares e paralelas; estabelece relações entre linhas, triângulos, seus lados e seus ângulos (internos e externos); examina relações entre paralelogramos, ângulos, lados, diagonais, retas paralelas; estabelece a equivalência de área e apresenta técnicas de aplicação de áreas entre paralelogramos, triângulos e outras figuras retilíneas; mostra como construir um quadrado sobre uma reta dada; finalmente, apresenta o "grande teorema de Pitágoras" (Heath, 1981, 1, p. 378) e sua proposição recíproca.[56]

A Prop. I.47 faz uso de várias dessas proposições, como já indicado anteriormente. A prova da igualdade dos dois paralelogramos BK, CK com os quadrados BG, CI se baseia no estabelecimento de igualdades de diferentes tipos:[57] entre ângulos, entre segmentos retilíneos, entre triângulos, quadrados e paralelogramos, cada qual se apoiando, quando é o caso, em outros tipos de relações entre seus elementos constituintes. E, ainda que o Livro II também trate da aplicação de áreas (algumas de suas proposições estando muito próximas ao subconjunto de proposições do Livro I que trata do mesmo tema) e por mais que haja, nesse livro e em livros posteriores, proposições que "contenham" provas indiretas ou potenciais do teorema de Pitágoras (da verdade que ele estabelece), Euclides não faz uso de nenhuma proposição desses outros livros.[58] Isso mostra que a Prop. I.47 é independente do que vem depois (mas, também, por outro lado, que haveria outras provas possíveis do teorema de Pitágoras, de teor distinto da fornecida pelo Livro I).[59] O teorema de Pitágoras, da forma como aparece no Livro I dos *Elementos*, tem autonomia epistêmica, mesmo diante da possibilidade de que a Prop. I.47 tenha sido elaborada como desenvolvimento de outra prova ou em continuidade a uma prova (tenha esta

56 Proclus (1992, p. 83) também divide o Livro I dos *Elementos* em três partes, de forma semelhante à divisão de Heath, ao mesmo tempo em que aponta seus objetos centrais, o triângulo e o paralelogramo, cujas teorias correspondentes – em razão de o paralelogramo a pressupor, como indica seu nome – são interligadas pela teoria das paralelas (Proclus, 1992, p. 83; p. 354-5). A Prop. I.47 evidencia o papel central desses dois objetos.

57 A importância das relações de igualdade será retomada mais adiante.

58 Provas alternativas e comentários sobre elas são dadas por Heath em diferentes lugares (1956, 1, p. 351-68; 1981, 1, p. 144-9).

59 Poderiam ser produzidas provas alternativas especialmente a partir do Livro VI. A Prop. VI.31, como já dito, é uma generalização do teorema, e as Prop. VI.8 e VI. 17 fornecem uma prova equivalente da I.47, algo efetivamente feito pelo Lema da Prop. X.33.

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

utilizado ou não a teoria das proporções),[60] da mesma forma que ela é independente de outras provas hoje conhecidas.[61]

Os especialistas afirmam abundantemente tanto a independência da Prop. I.47 em relação aos livros posteriores quanto sua especificidade em relação ao teor das outras provas. Heath afirma que a prova da I.47 pode ser considerada como "realmente equivalente a uma prova pelos métodos do Livro VI (proposições 8, 17), e o êxito de Euclides foi a de evitar o uso de proporções e de fazer a prova depender apenas do Livro I" (Heath, 1981, 1, p. 378), sem nada pressupor, portanto, do Livro VI, "para o qual ela deveria ter sido relegada, se a prova por proporções tivesse sido usada" (Heath, 1981, 1, p. 148); e, assim, por mais que uma prova fundada nas proporções possa ter sugerido a prova da Prop. I.47, foi um "golpe de gênio" (Heath sustenta a originalidade da prova euclidiana) a sua "transformação" naquela "baseada somente no Livro I", algo "absolutamente requerido pelo arranjo que Euclides fez dos *Elementos*" (Heath, 1981, 1, p. 148).[62] Joyce afirma algo semelhante: "É provável que provas mais antigas dependessem das teorias da proporção e da semelhança; e, como tal, essa proposição teria

60 A discussão a respeito de a Prop. I.47 ter sido elaborada em continuidade a uma prova historicamente anterior, baseada na teoria das proporções, em geral circunscreve-se (mas nem sempre) ao redor do problema da origem pitagórica do teorema. Autores que não assumem a origem pitagórica do teorema não negam a possibilidade de a I.47 ter sido derivada de proposições do Livro VI, em especial da Prop. VI.31: "Embora o teorema possa ter sido originalmente estabelecido, parece haver pouca razão para duvidar de que a prova euclidiana dele, conforme I.47, seja derivada da prova de VI.31" (Muller, 1981, p. 172); "sua prova em I.47, a qual Proclus atribui ao próprio Euclides, é claramente uma modificação daquela em VI.31" (Knorr, 1986, p. 102).

61 O número de provas do teorema de Pitágoras, se considerarmos não apenas os *Elementos* e a geometria, mas a matemática em geral, é potencialmente ilimitado. F. S. Loomis, em seu estudo intitulado *The Pythagorean proposition* (1968; 1ª ed, 1927), apresenta 370 provas, dentre as quais 109 são algébricas e 255 são geométricas. Uma das teses do autor é mostrar exatamente que provas algébricas e geométricas são ilimitadas em número. As provas apresentadas por ele correspondem a provas elaboradas desde 900 a. C. até 1940 (época da reedição do estudo). Cf. tb. Silva (2014).

62 Cf.: "Pode haver pouca dúvida de que a prova por proporção é o que sugeriu a Euclides o método da I.47; e a transformação do método de proporções em um outro baseado exclusivamente no Livro I, efetuado por uma construção e uma prova tão extraordinariamente engenhosa, é uma *façanha* que nos compele à admiração" (Heath, 1956, 1, 353-4). Veja também: "Esta prova [I.47] tinha que ser independente da teoria das proporções mesmo em sua forma rigorosa, porque o plano dos *Elementos* pospôs aquela teoria para os Livros V e VI, enquanto o teorema de Pitágoras era requerido tão cedo quanto era o Livro II" (Heath, 1956, 1, p. 353).

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

que vir só depois dos Livros V e VI, onde essas teorias são desenvolvidas. Parece que Euclides concebeu essa prova [I.47] para que a proposição pudesse ser colocada no Livro I" (Joyce, 1998, Prop. I.47). De forma semelhante, Muller afirma que, muito embora haja "poucas razões para duvidar" de que a Prop. I.47 tenha sido "derivada da prova da VI.31" (Muller, 1981, p. 172), o teorema de Pitágoras foi proposto para que fosse possível uma "fuga deliberada da teoria da proporção" (Muller, 1981, p. 27).

E, assim, historiadores e especialistas da matemática grega estão de acordo sobre a inexistência de qualquer referência à teoria das proporções e ao que é próprio aos livros posteriores, em especial, aos livros que poderiam trazer provas alternativas a ela: a Prop. I.47 faz uso apenas de conhecimentos anteriormente apresentados no Livro I, conforme exposto no quadro acima, sendo ela independente das teorias introduzidas posterirormente.[63] Proclus, como esperado, não poderia deixar de se pôr de acordo sobre isso: Euclides, diz ele, "não prova a proposição universal [VI.31] aqui, visto que ele ainda não tratou da semelhança entre figuras retilíneas nem provou qualquer coisa que seja sobre proporção. (...) Quanto à presente proposição [I.47], o autor dos *Elementos* prova sua conclusão por meio da comum teoria dos paralelogramos"; e, assim, continua ele, "visto que a prova dada pelo autor dos *Elementos* é clara, eu não penso que se deva adicionar algo mais de supérfluo, mas devemos nos satisfazer com o que ele escreveu, especialmente porque aqueles que fizeram adições (...) foram obrigados a assumir coisas provadas no Livro VI, sem nenhuma real necessidade" (Proclus, 1992, p. 427; p. 429).

Disso se conclui que o teorema de Pitágoras está absolutamente conforme o critério da ordem definido por Descartes e seguido por Euclides: ele se baseia apenas no que vem antes e em nada do que vem depois, e na medida do necessário.

63 Cf., p. ex. Boyer: "O livro [Livro I] termina com a demonstração (nas Proposições 47 e 48) do teorema de Pitágoras e sua recíproca. A prova do teorema dada por Euclides não é a usualmente dada nos livros de hoje, nos quais são aplicadas proporções simples aos lados de triângulos semelhantes formados baixando a altura sobre a hipotenusa. Foi dito que Euclides pode ter evitado tal prova por causa das dificuldades envolvidas em comensurabilidade. Somente no Livro V é que Euclides apresenta a bem fundamentada teoria das proporções, e até então o uso de proporcionalidades é evitado o quanto possível" (Boyer, 1974, p. 79).

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

3 Gueroult e o teorema de Pitágoras

Muito embora Martial Gueroult, ao longo dos dois volumes da obra, faça apenas rápidas alusões a Euclides, o fragmento a ser examinado a seguir, que contém uma breve apresentação do teorema de Pitágoras, é muito significativo, seja em razão dos próprios propósitos do intérprete (tanto restritos às discussões dos problemas relativos à *Meditação Sexta*, quanto concernente à sua interpretação geral da filosofia cartesiana), seja também como forma de explicitação do modo como ele, tendo em vista a compreensão do pensamento de Descartes, estabelece diálogo com a obra euclidiana e, como prolongamento dele, com os textos clássicos da história da matemática anteriores à filosofia moderna.[64] O fragmento extraído do texto original, ainda que corresponda a um parágrafo inteiro, será dividido em duas partes, com o intuito de examinar, primeiramente, o teorema propriamente dito e, em seguida, questões mais gerais relacionadas às imbricações concernentes à concepção de ordem do intérprete.

Segue a primeira parte do parágrafo, objeto de análise:[65]

> Tomemos um exemplo simples tirado desses *Elementos* de Euclides dos quais, nos diz Descartes,"entre aqueles que se estima serem os mais sábios na Filosofia da Escola, não há um, entre cem, que os compreenda".[66] Para estabelecer o teorema de Pitágoras, é necessário demonstrar, primeiramente, que, em um triângulo retângulo, cada um dos lados do ângulo reto é meio proporcional entre a hipotenusa inteira e a sua projeção sobre ela. Disso resultará que o quadrado de cada um desses lados é igual ao produto da hipotenusa inteira por sua projeção sobre ela. Será suficiente, então, adicionar membro a membro essas duas relações de igualdade para perceber que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos lados do ângulo reto (Gueroult, 1953, 2, p. 111).

64 Como afirmado, Gueroult já havia feito referência ao teorema anteriormente (Gueroult, 1953, 1, p. 61), denominando-o como tal e citando a paginação da edição de Clavius em que o teorema se encontra. O intérprete, contudo, não cita nem examina a edição de Clavius.

65 O trecho a ser examinado pertence ao § 13 do cap. XIV (Gueroult, 1953, 2, p. 108-16), se nos guiarmos pela numeração do sumário (não reproduzida no interior do texto).

66 Citação extraída da *Carta a Clerselier sobre as Quintas Objeções* (Descartes, 1983, p. 209; AT 9-1, p. 210-1).

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

A apresentação gueroultiana do teorema de Pitágoras, como se pode ver, se pauta em quatro passos. Ela se baseia: (1) na relação de proporcionalidade, presente em todo triângulo retângulo, entre hipotenusa, cateto e a projeção ortogonal dos catetos sobre a hipotenusa, de modo que cada um dos catetos seja meio proporcional entre a hipotenusa e a respectiva projeção; (2) na igualdade entre o quadrado de cada cateto e o produto[67] da hipotenusa pela projeção; (3) no equacionamento das duas igualdades, de onde resulta a afirmação (4) do teorema. Para o triângulo retângulo ABC (cf. Fig. 2, abaixo), podemos estabelecer as seguintes relações, conforme os passos seguidos por Gueroult: (1) *CB:BA::AB:BD; BC:CA::AC:CD*; (2) logo, AB^2=CB.BD; AC^2=BC.CD; (3) logo, por adição, *AB2 = AC2=(CB.BD) + (BC.CD)* e *(CB.BD)+(BC.CD)=BC.(BD+CD)=BC.BC=*BC^2 ; (4) logo, $BC^2=BA^2=AC^2$

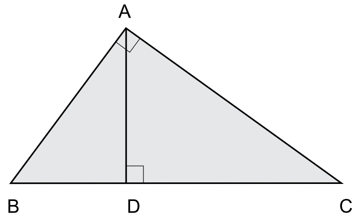
A descrição fornecida por Gueroult está correta e claramente apresentada, embora seja bastante sucinta e não esteja expressa"matematicamente", não havendo nenhuma objeção a ser feita à sua apresentação propriamente dita. Heath afirma que, caso aceitemos a tese de que Pitágoras tenha fornecido uma prova, ele a teria provavelmente pensado com uma configuração muito próxima dessa fornecida por Gueroult; tendo-a construído"por meio de sua (imperfeita) teoria das proporções" (dado que a teoria geral elaborada por Eudoxo é posterior), a forma elaborada por Pitágoras, segundo ele (Heath, 1956, 1, p. 354),[68] muito provavelmente seria esta:"Se ABC for um triângulo retângulo em A, e AD for perpendicular para BC, os triângulos DBA, DAC são ambos similares ao triângulo ABC. Segue-se dos teoremas de Eucl.VI.4 eVI.17 que: $BA^2=BD.BC, AC^2=CD.BC$, de onde, por adição, *BA2+AC2=BC2*" (Heath, 1981, 1, p, 148; cf. tb. 1956, 1, p. 353).

A única diferença substantiva entre a suposta prova de Pitágoras e a gueroultiana é que Gueroult não assume explicitamente a teoria da semelhança (também introduzida por Euclides apenas no Livro VI) entre os triângulos, como requisito para o estabelecimento das relações de proporcionalidade, afirmadas pelas Prop. VI.4 e VI.17. Uma prova desse gênero, podendo ser considerada idêntica à prova pitagórica sugerida por Heath, é fornecida por Euclides, mas apenas no Livro X, no Lema da Prop. X.33. Segue a parte do lema que nos interessa, cuja soma dos resultados fornece o teorema de Pitágoras:

67 Trata-se, na linguagem geométrica dos gregos, do retângulo entre a hipotenusa e a projeção do cateto.

68 Heath apresenta outras candidatas, segundo ele, menos prováveis (Heath, 1981, 1, p. 148-9; 1956, 1, p. 353-4).

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014



LEMA [DA PROP. X.33]

Seja ABC um triângulo retângulo, tendo o ângulo A reto; e fique traçada a perpendicular AD.

Digo que o retângulo CB, BD é igual ao quadrado sobre BA, e que o retângulo BC, CD é igual ao quadrado sobre CA (...).[69]

E, primeiramente, que o retângulo CB, BD é igual ao quadrado sobre BA.

Pois, visto que, em um triângulo retângulo, foi traçada a perpendicular AD do ângulo reto até a base, assim, os triângulos ABD, ADC são semelhantes tanto ao todo ABC quanto entre si [VI.8]. E, como o triângulo ABC é semelhante ao triângulo ABD, portanto, como CB está para BA, assim BA está para BD [VI.4]; portanto, o retângulo CB, BD é igual ao quadrado sobre AB [VI.17].

Pelas mesmas razões, o retângulo BC, CD é também igual ao quadrado sobre AC. (Euclides, 1956, 3, p. 74-5; 2009, p. 387).

E, assim, podemos assumir também a equivalência entre a prova gueroultiana, a suposta prova pitagórica fornecida por Heath e aquela dada pelo Lema da Prop. X.33, com a ressalva de que Gueroult deixa em aberto o modo como pensa poder fundamentar as relações de proporcionalidade pressupostas, ao contrário das outras provas baseadas na teoria da semelhança entre figuras. Conforme o Lema da X.33, em razão da semelhança dos triângulos, são estabelecidas as relações de proporcionalidade de onde resulta a igualdade entre os quadrados dos catetos e os retângulos formados pela hipotenusa e as respectivas projeções dos catetos. É também digno de nota que, embora o objetivo de Euclides, aqui, não seja exatamente o de provar uma vez mais o teorema de Pitágoras, os especialistas veem este lema como tal, por mais que a sua verdade não seja afirmada literalmente, de sorte que, como reconheceram Heath e Gueroult e como, ainda hoje, encontra-se expresso nos livros didáticos, ela é reconhecida de forma imediata "adicionando essas relações membro a membro" (Souza & Pataro, 2010, p. 42).

69 O Lema prova também que o retângulo BD, DC é igual ao quadrado sobre AD e que o retângulo BC, AD é igual ao retângulo BA, AC.

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

A prova pitagórica, por outro lado, continua Heath, seria "*in substance* idêntica àquela de Euclides" dada pela Prop. I.47,[70] o que possibilitaria considerar a prova gueroultiana como sendo substancialmente a mesma daquela fornecida no Livro I dos *Elementos*.[71] Tais provas (a prova gueroultiana e a supostamente pitagórica), contudo, não são idênticas àquela apresentada por Euclides, apesar das palavras de Heath.[72] Caso contrário, não haveria razão alguma para a discussão sobre a originalidade da prova euclidiana e sobre suas especificidades em relação a outras possíveis provas inspiradas na teoria das proporções. O que Heath quer dizer, com razão, é que elas têm em comum, como seu núcleo, a mesma relação de igualdade estabelecida entre quadrados construídos sobre os catetos e retângulos formados pela hipotenusa e pela projeção dos catetos. Ocorre que essa igualdade é estabelecida de forma absolutamente diferente em uma e outra prova: na Prop. I.47, ela se baseia no fato de que quadrados e retângulos são o dobro dos triângulos construídos sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas, tendo tais triângulos sido provados iguais entre si a partir da igualdade de seus lados e de seus ângulos, ao passo que, na prova gueroultiana-pitagórica (e nas provas dos livros didáticos atuais), a igualdade entre quadrados e retângulos é um desdobramento da determinação do lado do quadrado como meio proporcional entre a hipotenusa e o cateto, baseada, por sua vez, ou diretamente na semelhança dos triângulos, como fazem Heath, Euclides (Prop. X.33) e os livros didáticos, ou, então, em alguma outra condição que a possa estabelecer (como talvez seja o caso de Gueroult). A passagem da relação entre triângulos (não sendo os mesmos triângulos em cada prova) para a relação entre quadrados e retângulos, que é a passagem fundamental das provas de Euclides e de Heath (daí serem idênticas *in substance*), é garantida por teorias absolutamente distintas, de modo que, na Prop. I.47, é preciso mostrar que os triângulos são iguais, enquanto nas outras provas é suficiente saber que sejam semelhantes. Essa é também

70 "É de se observar que esta prova é, *in subtance*, idêntica àquela de Eucl. I.47, cuja diferença é que a última utiliza as relações entre paralelogramos e triângulos sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas em vez de proporções" (1981, 1, p. 148; cf. 1956, 1, p. 353).

71 A prova de Gueroult, além disso, se assemelha (como disse Boyer anteriormente) à forma ensinada nas escolas. É esta prova que se encontra ainda hoje em livros didáticos atuais (2015) do 9º ano do Ensino Fundamental (FTD, 2010, p. 36-7; 42).

72 Não se pretende, com isso, afirmar que Heath tenha se equivocado, mas apenas que tenha chamado a atenção para a semelhança das provas sob um "aspecto estrutural geral". O próprio Heath reconhece a diferença capital entre as duas provas.

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

a diferença entre as relações de igualdade utilizadas na I.47 e as relações de proporcionalidade de todas as outras provas.[73]

A prova gueroultiana-pitagórica, portanto, por mais que possa ser considerada idêntica "*in substance*" à prova euclidiana (I.47), tem fundamentos absolutamente distintos, de sorte que, conforme o próprio Heath afirma, sua "diferença" consiste no fato de que, na primeira, "a igualdade dos dois quadrados menores com os respectivos retângulos ter sido inferida pelo método do Livro VI, em vez de ser pela relação entre as áreas de paralelogramos e triângulos sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas, estabelecida no Livro I" (Heath, 1956, 1, p. 353; 1981, 1, p. 148).[74] Como diz Proclus,[75] o Livro I trata dessas figuras retilíneas que são as mais simples e fundamentais, o triângulo e o paralelogramo, e a Prop. I.47, apoiando-se em especial sobre a teoria dos paralelogramos, nada tem em comum com a teoria da semelhança e a das proporções.

Assim, a prova euclidiana do Livro I constrói seus passos diretamente sobre relações de igualdade, enquanto as outras derivam a igualdade da proporcionalidade (esta exigindo apenas a semelhança ou a equiangularidade dos triângulos, mas não a equilateralidade deles, caso em que eles rigorosamente seriam iguais).[76] Dados os três casos pelos quais se estabelecem as condições

---

73 Embora a igualdade possa ser incorporada pela teoria das proporções, nada impede que ela seja tratada de forma independente.

74 Assim, a afirmação de Heath sobre a identidade *in subtance* das duas provas é, na verdade, um atestado (também para ele) de que a aparente semelhança entre elas revela a sua mais profunda distinção: "a única diferença sendo que a igualdade dos dois quadrados menores com o respectivo retângulo é inferida pelo método do Livro VI, em vez da relação entre as áreas de paralelogramos e triângulos sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas estabelecidas no Livro I" (Heath, 1956, 1, p. 353). Assim, Heath reconhece que a "única diferença" entre as duas provas é uma diferença de fundamento.

75 Cf. detalhes em nota dada a seguir.

76 Parece ser essa uma das razões pelas quais Proclus insiste em dizer que o Livro I tem por principal fundamento, ao lado da "retidão", a relação de igualdade (referências à igualdade e à desigualdade são abundantes no *Comentário* de Proclus). Embora o círculo, afirma o comentador, "seja naturalmente superior à linha reta", o Livro I não se dedica a ele, mas às "primeiras e mais fundamentais figuras retilíneas, o triângulo e o paralelogramo" (Proclus, 1992, p. 82); e, assim, o livro se volta ao estudo da linha reta e das figuras retilíneas mais simples e regulares, e assume a "retidão" como um dos elementos constitutivos desses objetos. Tanto o triângulo quanto o paralelogramo (e seus elementos constituintes, como o ângulo (Proclus, 1992, p. 123-4; 131-2)), além disso, se pautam pelo critério da "igualdade e da desigualdade", de modo que a "igualdade é uma medida e também

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

da verificação de semelhança entre triângulos (dois ângulos iguais[77] (AA), dois lados proporcionais e um ângulo igual (LAL), três lados proporcionais (LLL)), percebe-se claramente a diferença entre a prova da Prop. I.47 e as outras, na medida em que, nela, a igualdade dos triângulos não pode ser estabelecida por essas condições. A igualdade entre dois triângulos retângulos é estabelecida pela pressuposição de que um dos ângulos seja reto e que esteja dada a *igualdade* (e não a proporcionalidade) entre, pelo menos, dois lados de um e dois lados de outro triângulo (o que determina a igualdade entre os terceiros). Ao contrário da semelhança, para estabelecê-la, portanto, não é suficiente que seja dada a igualdade de dois (ou três) ângulos (mesmo sendo um deles reto) ou a proporcionalidade entre os três lados de cada triângulo. Em outras palavras, para que se possa estabelecer a Prop. I.47, não se trata de substituir a proporcionalidade pela igualdade, mas deve-se estabelecer diretamente a igualdade dos triângulos, não sendo possível estabelecê-la a partir das condições pelas quais se estabelece a semelhança e, portanto, não sendo a igualdade estabelecida na Prop. I.47 um caso especial de proporcionalidade.

Tais diferenças se traduzem na dinâmica das operações e na configuração das provas, conforme se vê diretamente na apresentação de cada uma delas. A Prop. I.47 precisa construir passo a passo as igualdades a partir das quais o resultado é estabelecido, sendo-lhe fundamentais as construções geométricas sobre as quais se apoiam as operações, contrariamente às outras provas, nas quais as construções são, em geral, desnecessárias ou mínimas. Por outro lado, tais provas, por meio do recurso à proporcionalidade, são mais breves, mais abstratas e mais genéricas do que a do Livro I.

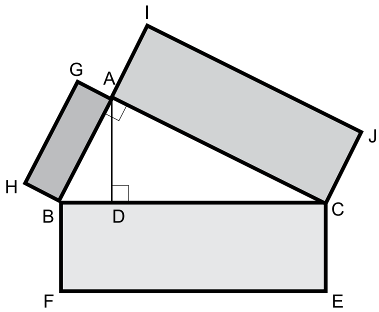
---

um limite da desigualdade" (Proclus, 1992, p. 293): "Aprendemos com o que foi exposto [proposições 1-26] tudo o que é possível dizer em um tratado elementar relativo à construção de triângulos e sua igualdade ou desigualdade. Euclides passa em seguida para as figuras de quatro lados, primeiramente nos instruindo sobre paralelogramos (...). Visto que o paralelogramo é regular, através de sua participação na igualdade, enquanto o trapézio não tem a mesma nem uma similar regularidade, é lógico que ele deve primeiro se dedicar à doutrina dos paralelogramos e examinar o trapézio em conexão com eles" (Proclus, 1992, p. 354). Jacques Peletier du Mans afirma, nessa mesma direção, por ocasião de suas observações sobre a I.47, que "a oportunidade de toda essa meditação procedeu do Reto e do Igual, dos quais, dissemos, quase todas as provas geométricas tomam sua origem" (Peletier du Mans, 1628, p. 111; cf. tb. p. 29). Assim, o Livro I se contrapõe, por exemplo, ao Livro III, que trata do círculo, e ao Livro V, que trata das razões e das proporções, um tipo de relação mais abrangente que a igualdade.

77 Por ser mais usual (familiar), usaremos a "igualdade" no lugar de "congruência".

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

Como forma de comparação e também em razão de análises feitas mais adiante, segue a Prop. VI.31, que é uma generalização da Prop. I.47 por substituir os quadrados por quaisquer figuras planas similares. Essa proposição prova que a relação entre áreas construídas sobre os lados do triângulo vale para todos os tipos de figuras planas, retilíneas ou não (polígonos, círculos, semicírculos, lúnulas, etc.), evidenciando, com isso, não haver nada que seja especial ou exclusivo na relação entre os quadrados. Segue a proposição:



Proposição 31

Nos triângulos retângulos, a figura sobre o lado que subtende o ângulo reto é igual às figuras semelhantes e semelhantemente descritas sobre os lados que contêm o ângulo reto.

Seja ABC um triângulo retângulo, tendo o ângulo BAC reto.

Digo que a figura sobre BC é igual às figuras semelhantes e semelhantemente descritas sobre BA, AC.

Fique traçada a perpendicular AD.

Então, como, no triângulo retângulo ABC, AD foi traçada do ângulo reto em A perpendicular à base BC, os triângulos ABD, ADC junto à perpendicular são semelhantes tanto ao todo ABC quanto entre si. E, como ABC é semelhante a ABD, portanto, como CB está para BA, assim AB está para BD. E, visto que três retas estão em proporção, como a primeira está para a terceira, assim a figura sobre a primeira está para a figura semelhante e semelhantemente descrita sobre a segunda. Portanto, como CB está para BD, assim a figura sobre CB está para a figura semelhante e semelhantemente descrita sobre BA. Pelas mesmas razões, como também BC está para CD, assim a figura sobre BC está para a figura sobre CA. Desse modo também, como BC está para BD, DC, assim a figura sobre BC está para as figuras semelhantes e semelhantemente descritas sobre BA, AC. Mas BC é igual a BD, DC; portanto, também a figura sobre BC é igual às figuras semelhantes e semelhantemente descritas sobre BA, AC.

Portanto, etc. Q. E. D. (Euclides, 1956, 2, p. 268-9 ; 2009, p. 264).

Como é claramente visível, a Prop. VI.31, baseando-se na teoria das proporções entre triângulos semelhantes, permite que se estabeleçam, a partir das proporções entre os lados dos

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

triângulos, relações de proporção entre as figuras construídas sobre os lados do triângulo retângulo ABC. Na verdade, os passos da prova euclidiana, embora mais complexos, são muito semelhantes aos fornecidos por Gueroult (com a diferença, evidentemente, de que Euclides trata da igualdade de quaisquer figuras planas semelhantes); dessa forma (cf. Fig. 3), (1) pressupondo as proporções *CB:BA :: AB:BD* e *BC:CA :: AC:CD*, Euclides prova (2) que *CB:BD :: fig. CB: fig. BA* e que *BC:CD :: fig. BC: fig. CA* , de onde conclui (3) que *BC:(BD+DC) :: fig. BC:(fig. BA+ fig. AC)* ; e, (4) sendo *BC=(BD+DC)*, temos *:: fig. BC:(fig. BA+ fig. AC)* . E, assim, a Prop. VI.31 é uma generalização do teorema de Pitágoras por estender a igualdade de áreas para quaisquer figuras planas (semelhantes e semelhantemente descritas) construídas sobre os lados do triângulo retângulo, cuja diferença mais fundamental com a Prop. I.47 é exatamente, além da generalização, o uso da noção de semelhança entre figuras retilíneas e da teoria geral das proporções, a primeira introduzida pela Def. VI.1 e a segunda apresentada ao longo do Livro V.[78]

E, então, feitas tais considerações, pergunta-se: Pode-se sustentar que a prova gueroultiana seja idêntica ou, pelo menos, se assemelhe à prova apresentada na Prop. I.47? Muito embora as considerações de Heath mostrem que seja possível encontrar semelhanças entre as provas, podemos concluir, sem sombra de dúvida, que a exposição gueroultiana não corresponde à prova euclidiana apresentada no Livro I dos *Elementos*: a prova de Gueroult *é uma prova absolutamente estranha ao espírito* do Livro I e da Prop. I.47. Não é uma questão de diferença de tratamento geométrico ou algébrico nem de algo relacionado à modernização da exposição ou à sua condensação. O problema é que as teorias que sustentam uma e outra prova são distintas, de sorte que Euclides não aceitaria a identificação da Prop. I.47 com a exposição gueroultiana, embora ambas estabeleçam a mesma relação de igualdade entre os quadrados sobre os catetos e os retângulos que compõem o quadrado maior (razão pela qual Heath pode falar de procedimentos idênticos "*in substance*", mas cujos fundamentos são absolutamente distintos). Euclides estabelece o teorema tendo por fundamento a igualdade de ângulos e triângulos e, sobretudo, a equivalência de figuras construídas sobre a mesma base e sob as mesmas paralelas, relações todas elas determinadas segundo o que permite o Livro I. Gueroult, ao contrário, faz uso de

78 Se, como insistimos várias vezes, a teoria das proporções é fornecida no Livro V, a teoria da semelhança, por sua vez, aparece apenas no Livro VI, cabendo à sua primeira definição afirmar que: "Figuras retilíneas semelhantes são tais que têm seus ângulos iguais um a um e seus lados ao redor dos ângulos iguais proporcionais" (Euclides, 1956, 2, p. 188; 2009, p. 231).

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

outros fundamentos, visto que recorre à teoria das proporções, algo absolutamente estranho e alheio aos primeiros livros dos *Elementos*: não há absolutamente nada, no Livro I e nos livros imediatamente posteriores (primeiro conjunto de livros), que diga respeito ao tema das proporções (e tampouco a respeito da teoria da semelhança), tendo tais teorias sido introduzidas por Euclides apenas nos livros posteriores. Segue-se, portanto, que a exposição do teorema de Pitágoras feita por Gueroult não corresponde ao teorema apresentado por Euclides. Logo, a prova gueroultiana se constitui simplesmente em outra prova, semelhante às provas que poderiam ter sido elaboradas apenas a partir dos Livros V e VI dos *Elementos*.

E, assim, ao se utilizar de fundamentos inexistentes no Livro I, a exposição gueroultiana do teorema de Pitágoras faz uso de uma teoria que ainda não foi introduzida e que aparecerá apenas no Livro V. E, portanto, ela se fundamenta em conhecimentos desconhecidos à prova euclidiana, visto que foram expostos somente posteriormente à própria prova; logo, Gueroult rompe com o critério da ordem cartesiano-euclidiana (que acredita estar seguindo). É um fato reconhecido pela tradição, desde os historiadores clássicos até os atuais, sem jamais ter havido contestação ou posicionamento contrário, que só se pode falar de teoria das proporções, nos *Elementos*, a partir do Livro V. E isso é evidente, pois são as definições do Livro V que introduzem as noções de razão e de proporção, dentre outras relacionadas à teoria.[79] Gueroult trata do teorema de Pitágoras fazendo uso de conhecimentos introduzidos apenas mais tarde, algo não admitido por Euclides. E, assim, Gueroult se equivoca quanto à noção de ordem euclidiana e ao seu uso.

Que Gueroult se apoia na teoria das proporções está dito literalmente por ele, de modo a não haver dúvida alguma. Como se pode ver no primeiro passo da prova que expõe, cada um dos lados do triângulo (cada um dos catetos) é meio proporcional entre as outras duas magnitudes correspondentes: "Para estabelecer o teorema de Pitágoras, é necessário demonstrar, primeiramente, que, em um triângulo retângulo, cada um dos lados do ângulo reto é *meio proporcional* entre a hipotenusa inteira e a sua projeção sobre ela". Segundo a ordem cartesiano-euclidiana, uma prova como a de Gueroult, portanto, poderia ser fornecida apenas pelo Livro VI (o Livro V se restringindo à exposição da teoria e a suas relações).

79 Cf. as definições do livro, em especial as definições 3-6.

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

A crítica feita aqui ao intérprete cartesiano, portanto, diz respeito *ao uso indevido que ele faz de uma teoria ainda desconhecida e, portanto, ainda ausente* por ocasião da demonstração do teorema de Pitágoras. Ora, Gueroult está se referindo à prova euclidiana dada no Livro I dos *Elementos* – e não a outra suposta prova (pois o teorema de Pitágoras corresponde à Prop. I.47, como ele reconhece explicitamente) –, e o que lhe interessa são exatamente as relações entre os elementos dessa prova e os seus fundamentos, para poder concluir a respeito do modo de proceder de Euclides. E, assim, Gueroult comete um grave erro de avaliação sobre a noção de ordem euclidiana. A teoria das proporções só aparece no Livro V dos *Elementos* e é utilizada por Euclides apenas a partir daí: não há nenhum historiador da matemática, a nosso conhecimento, que discorde disso, seja ele atual seja ele da época dos gregos ou da época moderna. Clavius é a maior prova disso: ele faz no Livro V dos *Elementos* uma longa investigação sobre a teoria das proporções, um verdadeiro tratado sobre o tema, dada a novidade representada pela introdução dessa teoria no Livro V.

Nestes termos, embora Euclides possa ter procedido como Descartes sob este aspecto, certo é que ele não procedera da forma como Gueroult descreve, tendo o intérprete cartesiano se equivocado na apreciação da noção de ordem seguida por Euclides na prova do teorema de Pitágoras. Tampouco pode Gueroult utilizar sua "reconstrução" do teorema de Pitágoras euclidiano para esclarecer questões cartesianas que estão em debate no momento em que ele faz intervir esse "exemplo tirado dos *Elementos*", pois, com efeito, a desfiguração da prova não permite mais a comparação. E, portanto, não sendo mais possível julgar se "Euclides procedera como Descartes", tampouco é possível se servir do "Euclides gueroultiano" para esclarecer certas questões cartesianas.[80] Em síntese, o equívoco gueroultiano não permite a compreensão da noção de ordem, seja ela euclidiana seja ela cartesiana, visto que sua exposição viola os critérios mínimos definidores da própria noção de ordem *tout court*.

80 Nada adiantaremos sobre as consequências desse equívoco de Gueroult para a sua interpretação da metafísica cartesiana. De todo modo, permanece legítima a afirmação de que Descartes tem procedido à moda dos geômetras gregos, pois, com efeito, foi ele próprio quem tem afirmado tê-los imitado quanto ao seu "modo de escrever". Evidentemente, tendo Descartes distinguido, nos geômetras, a ordem e a maneira de demonstrar, permanece em aberto em qual desses dois âmbitos ainda seja possível aproximar Descartes e Euclides. Embora deixemos para estudos posteriores a análise dessas consequências e um exame mais aprofundado, dentro desse contexto, da obra gueroultiana, é suficiente dizer, por ora, que Descartes, seguindo o procedimento analítico, se afasta de Euclides (que seguiu o procedimento sintético), não estando descartada a possibilidade de aproximá-los no âmbito da ordem, evidentemente desde que não compreendida à moda gueroultiana aqui examinada.

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

Passemos à segunda parte do fragmento gueroultiano. Explorando-o, pretende-se entender como Gueroult, levando adiante a tentativa de comparação entre o modo de proceder de Euclides e o de Descartes, tece considerações a respeito das tensões e articulações entre os horizontes que permitem a distinção entre o que ele chama de "ordem da ciência" e de "ordem das coisas". Segue o texto:

> É de toda evidência que, na figura considerada, cada uma das propriedades dos lados do ângulo reto supõe, *a parte rei*, a propriedade da hipotenusa que a ciência irá demonstrar. Se, com efeito, essa última propriedade estivesse ausente, as duas outras seriam, *a parte rei*, *ipso facto*, impossíveis. É também evidente que *a parte rei* essas três propriedades encontram-se entre si indissoluvelmente ligadas em uma unidade simples. A ordem das razões, porém, exige, para a constituição da ciência certa (aqui a geometria), que eu considere e demonstre separadamente a propriedade de cada lado do ângulo, para em seguida reuni-las, a fim de, desse modo, estabelecer a propriedade da hipotenusa, que se encontrava ela mesma, enquanto primitivamente desconhecida de minha ciência, separada das duas propriedades do ângulo com as quais, em si, ela forma uma unidade. Euclides, portanto, procedeu como Descartes. Ele instituiu sua demonstração por meio de propriedades "que (segundo os termos de E. Gilson) já supunham [*a parte rei*] essa propriedade que ele iria provar". Mas jamais alguém pensou que ele tivesse cometido um círculo. Ao contrário, não vemos como essa demonstração seria possível, se *a parte rei* a propriedade demonstrada não estivesse indissoluvelmente unida, desde toda a eternidade, às propriedades que servem à sua demonstração, e que, na ciência, elas mesmas devem ser consideradas sem ela e separadamente uma da outra (Gueroult, 1953, 2, p. 111).

Uma questão inicial diz respeito à dificuldade de identificação dos ingredientes assinalados por Gueroult. Quais seriam as "propriedades" dos lados do triângulo retângulo às quais o intérprete faz referência? Gueroult se refere a "três propriedades" e as atribui distributivamente a cada um dos lados do triângulo, havendo, portanto, uma propriedade para cada cateto e uma propriedade para a hipotenusa. Uma primeira opção seria pensá-las como correspondentes à própria caracterização de cada um dos lados do triângulo retângulo. Nesse caso, poder-se-ia dizer que cada cateto tem a propriedade de ser um dos lados contíguos ao ângulo reto, e a hipotenusa, a de ser o lado oposto ao ângulo reto; essa alternativa, contudo, não pode ser considerada viável, tendo em conta que Gueroult afirma a necessidade, ao invés de apenas explicitar a sua "definição", de demonstrar as propriedades de cada um dos lados do triângulo. Uma vez

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

consideradas as indicações do texto do intérprete, por outro lado, parece não haver alternativa senão a de que tais propriedades pensadas por ele consistam, no caso dos catetos, no fato de serem meios proporcionais entre a hipotenusa e a projeção correspondente (ou, então, no de terem cada qual seu quadrado igual ao retângulo (produto) formado pela hipotenusa e pela projeção)[81] e, no da hipotenusa, consistam no fato de ter seu quadrado igual à soma dos quadrados dos catetos. É isso que podemos concluir, em especial no que diz respeito à hipotenusa, dado que o intérprete afirma que é "a propriedade da hipotenusa que a ciência irá demonstrar", e é exatamente esta última igualdade que o teorema de Pitágoras provará, o que, por sua vez, nos permite, retroativamente, atribuir aos catetos as propriedades supramencionadas.

Resolvido esse primeiro impasse, uma segunda dificuldade diz respeito à forma de compreensão dessas "propriedades": como elas envolvem pelo menos três elementos do triângulo, isso nos leva a questionar até que ponto se pode falar em propriedades atributivas, como faz o intérprete, além do fato de, se fosse o caso, poderem ser atribuídas, todas elas indistintamente, ora ao cateto, ora à hipotenusa (ou a outro elemento).[82] Na verdade, é preciso reconhecer a natureza relacional de todas elas; e, assim, antes de serem atribuídas a este ou àquele dos membros participantes, elas devem ser avaliadas como solidariamente constituídas, dada a forma coparticipativa em cada relação de cada um dos componentes.

Há, ainda, mais uma dificuldade. A exposição gueroultiana, como evidenciado anteriormente, não corresponde à prova do teorema de Pitágoras exposta nos *Elementos*, a ponto de Eu-

---

81 As duas formas de caracterizar a "propriedade" de um cateto podem ser consideradas equivalentes ($a/b = b/c \leftrightarrow b^2 = ac$). O próprio Gueroult afirma que "é necessário demonstrar" a primeira, da qual a segunda "resulta" imediatamente.

82 Assim, podemos igualmente afirmar que: 1) se um cateto tiver a "propriedade" de ser meio proporcional entre a hipotenusa e a projeção, isso é equivalente a afirmar que a hipotenusa (ou a projeção) tem a "propriedade" de ser um dos extremos da proporção em que o cateto é meio e a projeção (ou a hipotenusa) é outro extremo; 2) se um cateto tiver a "propriedade" de ter seu quadrado igual ao retângulo formado pela hipotenusa e pela projeção, isso é equivalente a afirmar que a hipotenusa (ou a projeção) tem a "propriedade" de formar um retângulo com a projeção (ou a hipotenusa) cuja área seja igual ao quadrado do cateto; 3) se a hipotenusa tiver a "propriedade" de ter seu quadrado igual à soma dos quadrados dos catetos, isso é equivalente a afirmar que cada um dos catetos tem a "propriedade" de ter seu quadrado, somado ao quadrado do outro cateto, igual ao quadrado da hipotenusa. Assim, poder-se-ia atribuir uma ou mais propriedades seja a um seja aos outros componentes da relação.

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

clides não poder aceitá-la como equivalente à Prop. I.47. Ocorre que, se o objetivo de Gueroult era o de comparar Euclides e Descartes (com o intuito de comprovar que Euclides procedera como Descartes), deixa de ser pertinente uma avaliação dessa empreitada, dada a desfiguração de um dos elementos constituintes da comparação. Mesmo assim, embora já tenhamos elementos suficientes para afirmar a inadequação da comparação feita pelo intérprete, proceder-se-á, a seguir, ao exame da segunda parte do fragmento, tendo em vista a busca de esclarecimento e a apreciação das noções centrais que utiliza.

Dito isso, cabe observar que o fragmento do texto de Gueroult permite dois tipos de interpretação. A primeira se fundamenta no modo separado ou isolado pelo qual o intérprete compreende cada relação que aponta, sem considerar a totalidade do triângulo: mesmo que Gueroult se refira a um triângulo retângulo, seus comentários afirmam relações que podem (ou até devem) ser compreendidas fora do contexto que supõe a total determinação de cada um de seus componentes.[83] A segunda, ao contrário, considera dado um triângulo específico e sua unidade,[84] a partir do qual encontram-se determinados os elementos e as relações que constituem o triângulo como tal. A combinação entre as duas interpretações dá origem a três situações.

A primeira delas permite que se tome, rigorosamente falando, um lado do triângulo apenas como um segmento de reta. Nesse caso, este segmento, nele mesmo, não tem nenhuma das propriedades mencionadas por Gueroult: ainda que se possam construir, a partir de um segmento qualquer, certas figuras e certas relações,[85] não é possível, a partir dele exclusivamente, estabelecer nenhuma das relações apresentadas pelo intérprete, visto que é da natureza das relações exigir que estejam determinados minimamente os outros elementos que a compõem. Nem por isso, ainda que sem referência a triângulo retângulo algum, esse segmento estará impedido de ter as relações atribuídas por Gueroult; qualquer segmento, sem fazer parte de um triângulo retângulo, pode, estando em relação com outros dois segmentos: ser meio proporcio-

83 No fragmento, Gueroult examina o modo como a "propriedade" de um lado se comporta em relação a outro, sem menção explícita ao terceiro.

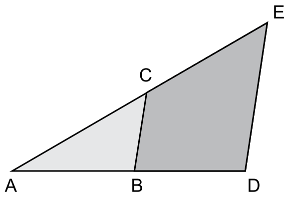
84 Vale assinalar desde já que a unidade constitutiva do triângulo não é idêntica à noção de "unidade" apresentada por Gueroult, entendida como unidade *de propriedades*.

85 É possível, por exemplo, construir círculos de raios AB e BA e um triângulo equilátero ABC, como mostra a Prop. I.1 dos *Elementos*.

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

nal entre eles; ter a área de seu quadrado igual à área do retângulo formado por eles; ter a área de seu quadrado igual à soma dos quadrados descritos sobre eles. Assim, as "propriedades" descritas por Gueroult,[86] por mais que não possam ser negadas aos triângulos retângulos, podem ser estabelecidas sem referência a eles e, portanto, sem menção ao teorema de Pitágoras.

Segue um exemplo para ilustrar (cf. Fig. 4). Dadas duas retas AB, AC e um ângulo A entre elas, é suficiente, para determinar AC como meio proporcional, que sejam traçadas, conforme a figura, BD igual a AC e DE, paralela a BC, encontrando o prolongamento de AC em E. E, assim, tendo feito AC igual a BD, segue-se que *AB:AC :: AC:CE* , sendo o segmento AC (ou BD) meio proporcional entre os segmentos AB e CE e seu quadrado igual ao retângulo de AB, CE.[87] Essa construção, entretanto, embora configure o lado AC como meio proporcional e seu quadrado igual ao produto entre AB e CE, de sorte que AC tenha a "propriedade" atribuída por Gueroult (a um lado de um triângulo retângulo), não vincula tais relações a um triângulo retângulo e à sua configuração específica.



Esse exemplo, na verdade, nos encaminha para a segunda situação, que permite que se trate de um lado de um triângulo retângulo, de suas relações ou "propriedades" sem a completa determinação do triângulo e, portanto, sem que se conheçam os outros lados e suas propriedades. A distinção entre esta situação e a que será apresentada a seguir é importante para deixar claro que, mesmo em se tratando de um triângulo retângulo, as considerações feitas sobre ou a partir de um de seus lados não permitem que sejam afirmadas suposições ou implicações com respeito aos outros lados. Essa conclusão, ilustrada há pouco para um segmento qualquer, se verifica também em um triângulo, quando se tecem relações a partir apenas de um de seus lados. E, assim, embora tratando-se de um lado do triângulo, ele "se comporta" apenas como segmento de reta. Serão explorados diferentes casos em seguida, visto que essa parece ser a interpretação mais fiel ao texto de Gueroult.

86 Com a devida alteração, evidentemente, dos nomes das entidades envolvidas, mas não das próprias entidades.

87 É instrutiva a consulta às primeiras páginas da *Geometria*, por ocasião da vinculação que Descartes faz das operações de multiplicação, de divisão e de extração de raízes com as relações de proporcionalidade. Cf. também os *Elementos*, em especial a Prop.VI.11 e outras em sua proximidade.

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

A terceira situação é aquela em que se toma como absolutamente dado ou determinado o triângulo retângulo sobre cujos elementos componentes se estabelecem as relações, estando, portanto, igualmente dados todos eles. Nesse caso, diferentemente dos demais apresentados anteriormente, já não é possível assumirmos como ponto de partida ou um ou outro lado,[88] mas, pelo menos, dois deles e o ângulo reto (e, portanto, o próprio triângulo): só há triângulo retângulo se houver determinação recíproca entre seus lados, o que pode ser observado também pela necessidade de se determinar, a partir disso, que as projeções dos catetos, somadas, devam corresponder à hipotenusa. Assim, não se podem estabelecer relações no interior de um triângulo retângulo a partir apenas de um lado. Isso significa que as "propriedades" estabelecidas por Gueroult, neste caso ainda mais, devam ser compreendidas como *relações* em que cateto, hipotenusa e projeção sejam igual e simultaneamente conhecidos (e, portanto, também o outro cateto e sua projeção, cuja soma com a anterior formam a própria hipotenusa). E, portanto, a hipotenusa (e o seu quadrado) e várias outras relações em que ela é membro – embora não a relação correspondente à verdade do teorema, objeto da prova – estão dadas e podem ser conhecidas tanto quanto os catetos (e seus quadrados). Logo, dentro dessa perspectiva, não só é ainda mais inadequada a expressão "propriedade", mas, principalmente, a atribuição de um *status* especial a um dos elementos dessas relações e de um tipo privilegiado de implicação ou de suposição entre eles, dado que tais relações não permitem esse tipo de desiquilíbrio entre seus membros.

É verdade que Gueroult não afirma que é a hipotenusa, mas que é a "propriedade" da hipotenusa que se encontra indeterminada e "desconhecida de minha ciência", e que tampouco é a hipotenusa, mas é a "propriedade" da hipotenusa que é suposta, *a parte rei*, pela "propriedade" dos catetos. Isso, contudo, nos leva à pergunta sobre como podem, em alguma medida, ser compreendidas afirmações desse gênero: pois, com efeito, estando a hipotenusa absolutamente conhecida e determinada desde o início como lado de um certo triângulo e pelas relações que ela constitui solidariamente com catetos e projeções, o que significa afirmar que ela supõe, *a parte rei*, a sua "propriedade"? Como entender essa dependência ontológica de uma entidade para com sua "propriedade"? Poder-se-ia afirmar que a "propriedade" da hipotenusa deva ser tratada separadamente, como indeterminada e desconhecida, embora suposta pela hipotenusa,

88 Mesmo que se assuma também o ângulo reto.

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

determinada e conhecida? Parece-nos extremamente difícil atribuir algum tipo de coerência à afirmação de que a hipotenusa, conhecida e determinada como parte da relação com cada cateto e respectivas projeções, *suponha*, *a parte rei*, a sua propriedade; e, além disso, que é preciso determinar antecipadamente aquelas relações (de que a hipotenusa é parte) para, em seguida, estabelecer a até então desconhecida "propriedade" da hipotenusa. Finalmente, a noção de "unidade simples" gueroultiana não é menos problemática: Gueroult não atribui unidade ao triângulo (e aos seus lados), mas às "propriedades" dos lados, sem deixar de assinalar, ao mesmo tempo, a necessidade de examiná-las separadamente, ao passo que o objeto de análise e ponto de partida do teorema de Pitágoras é o triângulo como tal.

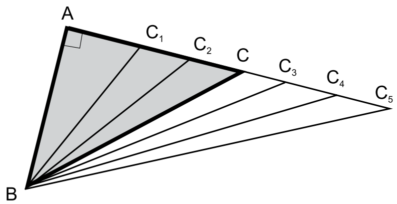
Feitas essas distinções, caso interpretarmos o texto de Gueroult como estabelecendo relações a partir de um lado (segunda situação), temos que concluir que as relações afirmadas (as "propriedades") não determinam o triângulo retângulo e os outros lados: se fizermos nossas considerações tendo como ponto de partida um cateto, por mais que devamos concordar com Gueroult que seja possível tratar dele ao mesmo tempo em que a "propriedade" da hipotenusa – e, nesse caso, também a própria hipotenusa – se mantenham "primitivamente" desconhecidas, é preciso concluir, ao contrário do que afirma, que ela permanecerá "eternamente" desconhecida, de modo que jamais haverá prova alguma do teorema. Por outro lado, se, ao invés de examinarmos separadamente cada um dos catetos, partimos das determinações do triângulo em si mesmo ou dos elementos mínimos exigidos (terceira situação), todas as determinações necessárias ao conhecimento da hipotenusa estão simultaneamente dadas, visto que a hipotenusa é parte constitutiva das relações em que se encontram submetidos os catetos, consistindo a "propriedade" dela, nas palavras de Gueroult, na simples "adição" dos elementos anteriormente demonstrados. E, assim, toda a carga demonstrativa se encontra na demonstração das "propriedades" dos catetos e não demonstração da "propriedade" da hipotenusa. Além disso, como veremos a seguir, determinado segmento pode, sem incompatibilidade alguma, ser cateto e hipotenusa dentro do conjunto das relações de um mesmo triângulo retângulo, o que mostra a relatividade desse tipo de atribuição. Mais do que isso – como já dizia a Prop. I.48 dos *Elementos*[89] –, a recíproca do teorema de Pitágoras é igualmente verdadeira, de modo que é possível

89 As inúmeras provas do teorema, dentre as quais muitas delas de natureza algébrica, abrem mais possibilidades do tratamento da sua proposição recíproca.

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

estabelecer relações e dependências no sentido inverso das afirmadas por Gueroult. Diz a Prop. I.48: "Caso o quadrado sobre um dos lados de um triângulo seja igual aos quadrados sobre os dois lados restantes do triângulo, o ângulo contido pelos dois lados restantes do triangulo é reto" (Euclides, 1956, 1, p. 368-9; 2009, p. 134). Finalmente, como prova a Prop. VI.31, já apresentada, a igualdade entre quadrados (a "propriedade" da hipotenusa afirmada por Gueroult) é apenas uma das relações provadas como válidas a todo triângulo retângulo. Segundo essa proposição (cujos passos se asemelham aos da prova gueroultiana do teorema de Pitágoras),[90] relações de semelhança e de proporcionalidade (e de áreas) podem ser estabelecidas sem menção alguma à "propriedade" gueroultina da hipotenusa, a partir das quais é provada a igualdade entre áreas de qualquer tipo de figuras planas "semelhantes e semelhantemente descritas", sejam elas retilíneas ou não, tais como polígonos (regulares ou semelhantes), círculos, semicírculos, arcos ogivais, lúnulas, dentre outras.

Vejamos algumas exemplificações de casos apresentados ou a eles relacionados:

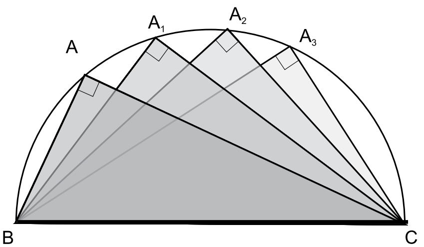


1) O segmento de reta AB (cf. Fig. 5) pode ser cateto de uma gama relativamente grande de triângulos retângulos: estando dados o cateto AB e o ângulo reto em A, os outros dois lados AC, BC do triângulo retângulo ABC podem variar no intervalo compreendido entre o paralelismo e a perpendicularidade de AC com BC, podendo ser alongados até o caso-limite em que o triângulo se transforme em um retângulo, e encurtados até o caso-limite em que a hipotenusa coincida com o lado AB. O segmento AB, portanto, é cateto de um grande número de triângulos retângulos, não implicando nem supondo nenhuma hipotenusa BC e nenhum cateto AC em especial.

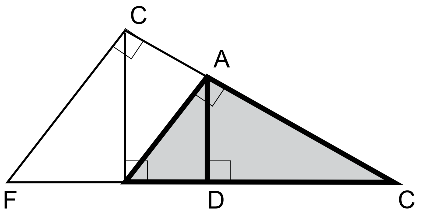
2) O segmento BC pode ser hipotenusa de um sem-número de triângulos retângulos: estando dado (cf. Fig. 6) o segmento BC como diâmetro do semicírculo BAC, os catetos BA, AC podem variar de muitas maneiras, mantendo sempre o ângulo reto em A. Como demonstra a Prop. III.31 dos *Elementos*, todo ângulo inscrito em um semicírculo é reto, de modo que BC é a

90 Como vimos anteriormente, a Prop. VI.31 generaliza o teorema de Pitágoras. Ela afirma relações de proporcionalidade idênticas às "propriedades" dos catetos indicadas por Gueroult, mas não as relaciona à área de quadrado algum e, portanto, tampouco faz menção ao quadrado da hipotenusa.

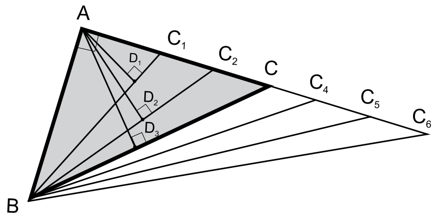
ANALYTICA
volume 18
número 2
2014



hipotenusa de todos os triângulos retângulos ABC inscritos no semicírculo BAC, não havendo nela nenhuma propriedade que clame por um cateto em especial ou por um par de catetos em particular. Logo, o quadrado da hipotenusa é igual a um sem-número de somas de quadrados descritos sobre diferentes combinações dos pares de catetos.



3) O segmento AB é simultaneamente cateto e hipotenusa dos triângulos ABC e ABD (cf. Fig. 7), e o segmento BC é concomitantemente hipotenusa do triângulo ABC e cateto de um triângulo BCE (tendo sido o ponto E determinado pelo cruzamento do prolongamento do segmento CA, na direção de A, e do segmento BE,[91] construído em B paralelamente a DA). Com isso, o segmento AB se torna também cateto do triângulo ABE. E, assim, um segmento qualquer exerce, ao mesmo tempo, a função (tendo simultaneamente as"propriedades") de cateto e de hipotenusa.



4) Por razões análogas, há um sem-número de retângulos que podem ser construídos com área igual a um quadrado ou cujos lados são extremos da proporção em que o lado do quadrado é meio. O quadrado descrito sobre o cateto AB (cf. Fig. 8) é igual ao retângulo formado por quaisquer das hipotenusas BC da figura e pelas projeções correspondentes AD, o que equivale a dizer que AB é meio proporcional em cada um dos casos.

Feitas todas essas considerações, parece que podemos concluir como inadequadas as implicações ou suposições que Gueroult crê existirem, no fragmento em análise, relativas ao teorema de Pitágoras, sejam elas no âmbito"da coisa" (*a parte rei*), sejam elas no âmbito da ciência

91 O segmento BE, não envolvendo nada mais complexo, pode ser traçado pelo mesmo procedimento pelo qual é traçada a perpendicular AD (p. ex., pela Prop. I.11 dos *Elementos*) ou, então, como reta paralela a ela (p. ex., pela Prop. I.31 dos *Elementos*).

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

(na ordem das razões). Cremos ter mostrado suficientemente que, uma vez que não é possível, a partir de um lado de um triângulo retângulo, derivar ou determinar os outros lados (e os outros elementos das relações), não se pode sustentar que um lado *suponha*, *a parte rei*, os demais lados nem que ele *permita conhecê-los*, visto que, em síntese, sua determinação não implica nem supõe a determinação dos demais lados do triângulo. Em outras palavras, por mais que lhe esteja associado o ângulo reto, um lado não garante a determinação e a unidade constitutiva de um triângulo retângulo:[92] por exemplo, um cateto (com uma magnitude fixa) pode ser meio proporcional de inúmeras combinações dos extremos, e uma hipotenusa pode ter seu quadrado igual a um sem-número de combinações de dois quadrados.[93] Logo, não se pode sustentar que a "propriedade" de um cateto "supõe, *a parte rei*, a propriedade da hipotenusa que a ciência irá demonstrar", ao contrário do que afirma o intérprete: por mais que o cateto tenha todo tipo de determinação possível, permanece, mesmo assim, a partir dele, indeterminada a hipotenusa; e, portanto, ele não precisa supô-la para ser o que é e para ter as relações que tem; podemos tratar de um determinado cateto AB e de sua "propriedade" e, ao mesmo tempo, variar a magnitude da hipotenusa BC, de modo que o cateto AB poderá ser meio proporcional entre quaisquer hipotenusas BC e projeções BD, o mesmo valendo para a igualdade de seu quadrado com o retângulo formado pelos segmentos indeterminados BC, BD. Desse modo, portanto, a "propriedade" atribuída por Gueroult ao cateto não implica a *determinação* do triângulo retângulo ABC nem a da hipotenusa e, portanto, não *supõe* a "propriedade" dela. Pelas mesmas razões, não se pode sustentar que, se "essa última propriedade [a da hipotenusa] estivesse ausente, as outras duas seriam, *a parte rei*, *ipso facto*, impossíveis": por mais que a hipotenusa permaneça indeterminada e sua "propriedade" efetivamente "ausente", isso não impede que um cateto esteja

92 A determinação de um triângulo retângulo exige, no mínimo, que estejam dados dois lados e o ângulo reto, o que implica a determinação imediata do terceiro e também, em seguida, a das projeções dos catetos cuja soma é igual à hipotenusa.

93 Imaginemos, para dar mais um exemplo, um triângulo retângulo com cateto a=4, meio proporcional entre a hipotenusa x e a projeção y. Os extremos da proporção $y{:}a::a{:}x$ podem assumir diferentes valores (2 e 8; 1 e 16; 1/2 e 32 ...), mantendo inalterado o meio proporcional (o cateto) e seu quadrado. De um modo ainda mais geral, se tivermos uma equação do tipo $a^2=xy$, supondo a=4, o quadrado de lado a seria igual a quaisquer valores de x e y cujo produto seja igual a 16. Tais valores seriam determinados por qualquer ponto de uma hipérbole correspondente à equação. E, assim, a seria também meio proporcional $(x/a=a/y)$ entre quaisquer valores de x e y da hipérbole.

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

determinado e esteja garantida sua suposta "propriedade", permanecendo fixas sua magnitude e a área de seu quadrado. Da mesma forma, não parece apropriado afirmar que "*a parte rei* essas três propriedades encontram-se entre si indissoluvelmente ligadas em uma unidade simples", tendo em conta que uma pode ser determinada independentemente da estipulação ou fixação da outra, dado que a unidade que há é a do triângulo e não a das "propriedades" de segmentos que o compõem. Assim, apresentam-se, a nosso ver, desajustadas as determinações "ontológicas" afirmadas por Gueroult referentes ao seu fragmento sobre o teorema de Pitágoras.

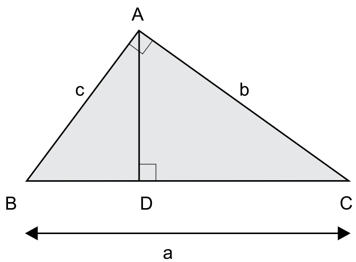
Tampouco parece apropriado afirmar que, segundo a "ordem das razões" e "para a constituição da ciência certa", é preciso que "eu considere e demonstre *separadamente* a propriedade de *cada lado* do ângulo, para (...) estabelecer a propriedade da hipotenusa, que se encontrava ela mesma, enquanto primitivamente desconhecida de minha ciência, *separada* das duas propriedades do ângulo". Ainda que se deva concordar com Gueroult que conhecer seja determinar alguma coisa "primitivamente desconhecida", essas considerações sobre a separação e a independência entre as "propriedades", além de confirmarem a leitura que estipulamos como a mais adequada ao texto do intérprete – a de que ele não parte do triângulo, mas apenas de um lado, para estabelecer as relações com outro lado –, implicam a impossibilidade de se conhecer uma a partir de outra: não se pode partir de uma consideração independente e separada da "propriedade" de um cateto para, em seguida, determinar a "propriedade" da hipotenusa e integrá-la em seguida ao triângulo. As razões são análogas às fornecidas anteriormente: o tratamento separado de um cateto deixa indeterminada a hipotenusa e o outro cateto, jamais podendo integrá-los à unidade própria de um triângulo.

Talvez se deva ler o fragmento do texto de Gueroult a partir da outra perspectiva (terceira situação). Admitamos (embora não pareça ser a compreensão de Gueroult) que suas reflexões impliquem a configuração do triângulo como minimamente determinada e, portanto, que a hipotenusa e a projeção estejam igualmente dadas. (Nesse caso, Gueroult estaria pressupondo, simultaneamente e desde o início, como dados os dois catetos do triângulo, suas projeções e a própria hipotenusa para, então, determinar a "propriedade" da hipotenusa, estando igualmente determinada a igualdade entre a hipotenusa e a soma das duas projeções.)[94] Dentro dessa

94 Não há, como já dito, estando dados dois lados e o ângulo reto (o mínimo exigido para a determinação de um triângulo retângulo), como considerar indeterminados os outros elementos da configuração. Assim, ou o triângulo e seus elementos estão dados, ou não há triângulo retângulo algum.

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

perspectiva, a igualdade entre o produto da hipotenusa com cada uma de suas partes – cada qual correspondente à projeção de cada cateto – e o quadrado de cada um dos catetos já é dada pelas "propriedades" dos catetos (pelo triângulo). Toda a dificuldade da demonstração do teorema de Pitágoras (e isso é comum, mantidas as distinções dos seus fundamentos, à Prop. I. 47, a prova guereoultina e a todas as outras provas aqui referidas) se encontra, portanto, no *estabelecimento das "propriedades" dos catetos*, e não na passagem delas para a "propriedade" da hipotenusa, esta última consistindo na simples "substituição" de termos equivalentes. Vejamos a seguir.



Estando estabelecido (pelas "propriedades" dos catetos; cf. Fig. 9) que $b^2=a.m$ e que $c^2=a.n$ (e sendo $m+n=a$), nada mais resta para estabelecer a "propriedade" da hipotenusa, como o próprio Gueroult afirma, senão "adicionar membro a membro" as igualdades (e assim: $b^2+c^2= a.m+a.n$), sendo evidente que $a.m+a.n$ é igual a $a(m+n)$ e, portanto, igual a a^2.[95] Assim, a prova de Gueroult tem seu centro na determinação das relações expressas pelas "propriedades" dos catetos (passos 1 e 2, da prova de Gueroult apresentada anteriormente), e não na passagem destas (como ele acredita) para a "propriedade" da hipoteneusa, por vezes nem mesmo mencionada em algumas provas ou apenas indicada como conclusão.[96] E, portanto, tampouco dentro dessa perpectiva se pode afirmar que as "propriedades" de cada cateto supõem, *a parte rei*, a da hipotenusa e que devam

95 É desta forma que encontramos a demonstração do teorema de Pitágoras em manuais da escola. Cf.: "Esse teorema também pode ser demonstrado utilizando algumas das relações métricas estudadas anteriormente. (...). Nesse triângulo [fornecido acima], temos $b^2=a.m$ e $c^2= a.n$. Adicionando essas relações membro a membro, temos, $b^2+c^2= a.m+a.n$ (fatoramos $a.m+a.n$ colocando a em evidência), $b^2+c^2= a(m+n)$ (temos $m+n=a$), $b^2+c^2= a.a$, $b^2+c^2= a^2$. Portanto, $b^2+c^2= a^2$" (Souza & Pataro, 2010, p. 43). É digno de nota que o manual afirma explicitamente que a demonstração se fundamenta nas relações estudadas anteriormente, as quais correspondem exatamente às "propriedades" dos catetos afirmadas por Gueroult.

96 É assim que procedem as demonstrações por nós referidas, a exemplo do Lema da Prop. X.33. Como se pode verificar nesse lema e na Prop. VI.31, a prova do teorema (ou do que lhe corresponde) se fundamenta na teoria da semelhança e na teoria da proporcionalidade, algo estabelecido por Gueroult no primeiro passo de sua prova, os outros passos sendo manipulações e combinações dessas relações já dadas. Não é diferente o caso da Prop. I.47: sua prova centraliza-se no estabelecimento de igualdades de áreas.

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

ser tratadas separadamente pela ciência para, em seguida, reunidas, estabelecerem a "propriedade" da hipotenusa, visto que a hipotenusa é parte constitutiva da dita "propriedade" do cateto, estando ela determinada desde o início tanto quanto os catetos. Em outras palavras, as "propriedades" dos catetos já determinam que a soma de seus quadrados (b^2+c^2)seja igual aos dois retângulos ($b^2=a.m$ e $c^2=a.n$) , de modo que, "adicionados membro a membro", os retângulos somados se mostram equivalentes ($a.m+a.n=a.(m+n)=a^2$) ao quadrado da hipotenusa, e os quadrados sobre os catetos iguais à "propriedade" da hipotenusa. Assim, o peso da prova se encontra no estabelecimento das "propriedades" dos catetos, e não na passagem delas para a "propriedade" da hipotenusa.

E, portanto, se, na perspectiva anterior, o que temos é a indeterminação das relações e, no fundo, o fracasso da demonstração, dado que um lado não implica nem supõe os demais – correspondendo tal perspectiva à interpretação mais viável da segunda parte do fragmento do texto de Gueroult, em vista do conjunto de relações que ele estipula –, na segunda, por sua vez, há a necessidade de se compreender o núcleo da prova como insidindo sobre o seu primeiro passo (como evidenciam todas as provas), consistindo os outros em transformações a partir dele e em adições dos resultados, o que impede que se avalie a relação entre eles dentro do quadro das determinações indicadas por Gueroult. O que se pretende dizer é que toda a carga de investigação se concentra nas relações de semelhança e de porporcionalidade sintetizadas no primeiro passo indicado por Gueroult, e não nos seus desdobramentos que se lhe seguem e permitem a conclusão do teorema. Não há, portanto, tampouco dentre dessa segunda perspectiva, essa articulação e essa tensão entre "propriedades" dos catetos e "propriedades" da hipotenusa, sejam elas no âmbito da coisa, sejam elas no âmbito do conhecimento da coisa. Não se pretende negar a existência de articulações ou tensões entre os elementos do triângulo retângulo, mas o seu jogo não se dá no lugar em que Gueroult acredita se dar, pois, como mostra o Lema da Prop. X.33, toda a carga demonstrativa do teorema se concentra no estabelecimento de relações de semelhança entre triângulos (algo ausente na análise de Gueroult), a partir das quais são afirmadas as relações de proporcionalidade, de onde "resultarão" (como admite Gueroult) os passos subsequentes da prova. Sem pretender, evidentemente, negar a validade da prova, não se pode aceitar esse conjunto de relações que Gueroult quer ver nela, sejam *a parte rei* sejam sob a perspeciva da sua "ordem das razões". E, assim, tampouco sob essa perspectiva se pode concordar com as reflexões apresentadas pelo intérprete.

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

Considerações finais

O presente artigo consistiu na análise de um pequeno fragmento de texto, segmentado em duas partes, do volume dois do livro *Descartes segundo a ordem das razões*, de Martial Gueroult. As teses apresentadas, correspondentes a cada uma das partes, se encontram ao longo do artigo, não havendo necessidade de retomá-las. De um modo geral, elas se encontram inseridas em um contexto crítico ao intérprete cartesiano no que diz respeito à sua perspectiva metodológica, em especial, à sua noção de ordem. Futuras publicações darão continuidade a essa perspectiva.

Por mais que seja arriscado apontar as razões que teriam fundamentado a interpretação gueroultiana do teorema de Pitágoras e suas reflexões adjacentes, é preciso assinalar, segundo nosso ponto de vista, certas lacunas na hermenêutica gueroultiana. A principal dentre elas consiste na ausência de análise textual de obras clássicas na área da matemática, ao mesmo tempo em que o intérprete aceita a tese da "filiação metodológica" cartesiana à tradição dos geômetras gregos. Gueroult não aplica aos *Elementos* a "técnica" estruturalista que prescreve à compreensão das *Meditações*, qual seja, a de que a boa compreensão de um clássico consiste na "análise objetiva das estruturas da obra" em questão, com o propósito de "pôr a nu as estruturas demonstrativas e arquitetônicas" (Gueroult, 1953, 1, p. 10) que ela contém. Não se trata de exigir um exame exaustivo da obra euclidiana – já que Gueroult escreve sobre Descartes e não sobre Euclides –, porém uma análise minimamente suficiente da Prop. I.47 conforme a forma como ela fora dada por Euclides (e Clavius), e da espinha dorsal dos *Elementos*, algo requerido pelos seus próprios princípios interpretativos. Por outro lado, o intérprete não se priva de estabelecer conexões fundamentais entre Descartes e Euclides. Gueroult não cita – e, portanto, não examina – o texto dos *Elementos* em nenhuma ocasião, por mais que não se furta em estabelecer uma tese absolutamente forte entre as *Meditações* e os *Elementos*,[97] da mesma forma que jamais cita

97 Como já afirmado no começo do artigo, tais teses podem ser sintetizadas nas seguintes afirmações de Gueroult: "O modelo que seguirá o filósofo [Descartes] não será mais o *Tratado de Filosofia*, dividido em capítulos, ou a *Summa*, com suas questões e seus artigos, mas os *Elementos* de Euclides" (Gueroult, 1953, 1, p. 20); "As *Seis Meditações* não são senão a réplica metafísica dos *Quinze Livros* dos *Elementos* de Euclides. Se as noções de que elas tratam pudessem, como os conceitos da geometria, apoiar-se na imaginação, em vez de serem contrariadas por ela, as *Seis Meditações*, elas mesmas, não seriam senão *Livros* como aqueles de Euclides" (Gueroult, 1953, 2, p. 288).

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

a tradição dos praticantes da análise (dentre os quais se destaca Pappus),[98] muito embora afirme querer entender Descartes segundo o que prescreve a "análise" (cf. Gueroult, 1953, 1, p. 26-7).[99]

Parece-nos que Gueroult, querendo mostrar que Euclides procedera como Descartes – para poder utilizá-lo no entendimento do problema da imbricação entre as provas da *Meditação Sexta* –, "leu" Euclides a partir de (sua leitura de) Descartes e, assim, pôde confirmar que Descartes seguia os mesmos passos de Euclides. De nossa parte, estamos nas antípodas de uma interpretação desse gênero, tendo aqui fornecido parte de nosso posicionamento crítico.

Referências bibliográficas

ADAM, C. & TANNERY, P. (ed.). 1996 (1897-1909). *Oeuvres de Descartes*. Paris: Vrin/Centre National du Livre. 11 v. (AT).

BOYER, C. B. 1974. *História da matemática*. Tradução de E. F. Gomide. São Paulo: E. Blücher, Ed. USP.

CAJORI, F. 1909. *A history of mathematics*. Londres: The Macmillan Company.

CLAVIUS, C. 1607 (1574). *Euclidis Elementorum libri XV*. Frankfurt: N. Hoffmanni – I. Rhodij. 2 v.

COMMANDINO, F. 1622 (1572). *Euclidis Elementorum libri XV*. Pesaro: C. Francischinum.

DESCARTES, R. 1996 (1897-1909). *La Géométrie*. In: ADAM, C. & TANNERY, P. (ed.). *Oeuvres de Descartes*. Paris: Vrin/Centre National du Livre. v. 6, p. 367-485. (AT).

DESCARTES, R. 1983a (1973). *Meditações*. Tradução de J. Guinsburg e de B. Prado Júnior. 3 ed. São Paulo: Abril Cultural, p. 143-211. (Os pensadores).

---

98 Pappus é o geômetra mais importante para o pensamento cartesiano (vindo Apolônio em seguida), tanto do ponto de vista matemático quanto metodológico e filosófico. Descartes cita literalmente longos trechos de sua obra na *Geometria* (AT, 6, p. 377-9), e dialoga frequentemente com ele. Gueroult, de sua parte, jamais cita ou faz alguma referência ao nome de Pappus.

99 Um dos objetivos do presente texto foi também o de evidenciar a ausência, na obra gueroultiana, de referências à tradição dos geômetras gregos, praticantes da análise.

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

DESCARTES, R. 1983b (1973). *Objeções e respostas*. Tradução de J. Guinsburg e de B. Prado Júnior. 3 ed. São Paulo: Abril Cultural, p. 143-211. (Os pensadores).

EUCLIDES. 1969-1977. *Elementa*. Edição de I. L. Heiberg e de E. S. Stamatis. Leipzig: Teubner.

EUCLIDES. 1944 (1768). *Elementos de geometria:* dos seis primeiros livros, do undécimo e duodécimo. Tradução de A. Brunelli da versão latina de F. Commandino e das notas de R. Simson. São Paulo: Ed. Cultura.

EUCLIDES. 1884-1916. *Opera omnia*. Edição de I. L. Heiberg e de H. Menge. Leipzig: Teubner. 9 v.

EUCLIDES. 2009. *Os elementos*. Tradução de I. Bicudo. São Paulo: Ed. UNESP.

EUCLIDES. 1956 (1908). *The thirteen books of the Elements*. Tradução de T. L. Heath. Nova York: Dover. 3 v.

GILSON, E. 1984 (1930). *Études sur le rôle de la pensée médiévale dans la formation du système cartésien.* Paris: Vrin.

GUEROULT, M. 1953. *Descartes selon l'ordre des raisons.* Paris: Aubier-Montaigne. 2 v.

GUEROULT, M. 1984-1985. *Descartes' philosophy interpreted according to the order of reasons*. Tradução de R. Ariew. Minneapolis: University of Minnesota Press. 2 v.

GUEROULT, M. 2005. *Descartes según el orden de las razones*. Tradução de F. Bravo. Caracas: Monte Ávila Editores Latinoamericana. 2 v.

HEATH, T. L. 1981 (1921). *A history of Greek mathematics*. New York: Dover. 2 v.

HEATH, T. L. 1956 (1908). *The thirteen books of the Elements.* Tradução de T. L. Heath. Nova York: Dover. 3 v.

JOYCE, D. E. 1998. *Euclid's Elements.* Worcester: Clark University. Disponível em: < http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>. Acesso em: jan., 2015. KNORR, W. R. 1993 (1986). *The ancient tradition of geometric problems.* New York: Dover.

KNORR, W. R. 1975. *The evolution of the Euclidean Elements.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

LOOMIS, F. S. 1968 (1927). *The Pythagorean proposition*. Washington: The National Council of Teachers of Mathematics.

LOUREIRO E VASCONCELLOS, F. de A. 2009 (1925). *História das matemáticas na antiguidade*. Lisboa: Ludus.

MULLER, I. 2006 (1981). *Philosophy of mathematics and deductive structrure in Euclid's Elements*. Cambridge: MIT Press.

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

NEUENSCHWARDER, E. 1973. Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 9, n. 4, p. 325-380.

PELETIER DU MANS, J. 1628 (1611). *Les six premiers livres des Éléments géométriques d'Euclide*. Gênova : Jean de Tournes.

PROCLUS. 1992 (1970). *A commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Tradução de G. R. Morrow. Nova Jersey: Princeton University Press.

ROMMEVAUX, S. 2005. *Clavius une clé pour Euclide au XVI^{e} siècle*. Paris: Vrin.

SILVA, J. E. B. 2014. *Teorema de Pitágoras: algumas extensões/generalizações e atividades com o Software Geogebra*. São José do Rio Preto (SP). 152 p. Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas.

SOUZA, J. & PATARO, P. 2010. *Matemática*: 9º. ano, módulo 3. São Paulo: FTD. (Coleção FTD sistema de ensino).

ZEUTHEN, H. G. 1902. *Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge*. Paris: Gauthier Villars.

RESUMO

Este artigo examina um fragmento de texto do livro Descartes segundo a ordem das razões, de Martial Gueroult, concernente ao teorema de Pitágoras apresentado por Euclides no Livro I dos Elementos (Prop. I.47), e se divide em três partes. Na primeira parte, depois de apresentar certas características dos Elementos, o artigo avalia a noção de ordem atribuída por Descartes aos geômetras gregos e conclui pela adequação dessa noção à obra euclidiana. Na segunda, ele analisa os passos da prova apresentada pelo intérprete cartesiano e mostra que Gueroult se equivoca em sua exposição do teorema de Pitágoras, uma vez que faz uso da teoria das proporções, introduzida por Euclides apenas no Livro V; e, assim, ao se utilizar de conhecimentos posteriores aos da prova dos Elementos, a prova de Gueroult não segue os preceitos da ordem cartesiano-euclidiana, não podendo Euclides aceitá-la como equivalente à sua. Na terceira e última parte, o artigo tece considerações sobre o restante do fragmento e questiona as imbricações que o intérprete crê existirem no interior da sua prova, sejam elas no âmbito da "ordem das coisas", sejam elas no âmbito da "ordem das razões". Não sendo pertinente afirmar que (o seu) Euclides procedera como Descartes, tampouco é adequado ao intérprete utilizar-se do primeiro para compreender o segundo.

Palavras-chave*: Martial Gueroult; Teorema de Pitágoras; Elementos de Euclides; René Descartes; ordem cartesiano-euclidiana; ordem das razões; ordem das coisas; teoria das proporções.*

ANALYTICA
volume 18
número 2
2014

ABSTRACT

Critical note on Gueroult's understanding of the Pythagorean theorem presented by Euclid

This article examines a passage from Martial Gueroult's book Descartes according to the order of reasons, concerning the Pythagorean theorem showed by Euclid in Book I of the Elements (Prop. I.47), and is divided into three parts. In the first part, after showing certain characteristics of the Elements, the article evaluates the notion of order attributed by Descartes to the Greek geometricians and concludes in favor of the adequacy of this notion to the Euclidean work. In the second part, it analyses the proof steps presented by the Cartesian interpreter and shows that he is mistaken in his demonstration of the Pythagorean theorem because he uses the theory of proportions, introduced by Euclid only in book V; so, the use of subsequent knowledge to the proof of the Elements indicates that Gueroult's proof simply does not follow the Cartesian-Euclidean order, bringing the consequence that his proof is not equivalent to Euclid's. In the third and last part, the article makes considerations about the remainder of the passage and inquires on the imbrications the interpreter assumes to be inside his own proof, in the scope of the "order of things" as well as in the scope of the "order of reasons". In short, if it is not quite adequate to assert that (his) Euclid proceeded like Descartes, so it is not also appropriate to use the first to understand the second through those standards.[100]

Keywords: *Martial Gueroult; Pythagorean theorem; Euclid's Elements; René Descartes; Cartesian-Euclidean order; order of reasons; order of things; theory of proportions.*

Recebido em maio de 2015

Aprovado em outubro de 2015

100 Agradeço ao João José R. L. de Almeida pela revisão da tradução inglesa do resumo.