LÓGICA E CONHECIMENTO

Oswaldo Chateaubriand
PUC-RIO/CNPq

O método axiomático de Aristóteles é uma abordagem honesta para a verdade e a realidade. Começa-se do que é claro e auto-evidente e procede-se ao resto de modo direto, construtivo e verificável. Aristóteles sustentava que este era o método da ciência teórica; e ele tinha razão. Até agora, no entanto, as únicas ciências teóricas são a lógica, a matemática e a física teórica; e se outras ciências se tornarem teóricas se tornarão como estas.

A noção de dedução lógica que aperfeiçoou a de Aristóteles no final do século dezenove manteve-se direta e verificável. Se partirmos de verdades, só podemos alcançar verdades; e que nosso alcançar é um alcançar honesto pode ser verificado por qualquer um. Este é o grande mérito desta abordagem, e depende da finitude e da efetividade.

As tentativas filosóficas no século vinte em tornar a ciência e a filosofia lógicas e matemáticas são justificadas pela mesma busca por abordagens honestas e diretas. Devemos sempre saber sobre do que estamos falando e o que estamos dizendo, e devemos ser capazes de verificar que nossas conclusões se seguem de nossas premissas. Isto é o que subjaz grande parte da insistência da filosofia analítica na análise e na argumentação. E isto é admirável. Como disse Putnam, o positivismo lógico é o único movimento filosófico que conduziu ao seu próprio fracasso por ser absolutamente honesto em sua tentativa de elaborar sua visão de mundo[1]. Esta é

(1) Não encontrei a citação de Putnam a que me referi, mas ele conclui "Logical Positivism and the Philosophy of Mind" com os seguintes comentários sobre o positivismo lógico (pp. 224-225):

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

uma das razões pelas quais aprecio o positivismo lógico e grande parte da filosofia analítica que inspirou.

Por que é que esta abordagem honesta e direta da realidade não funcionou? Por duas razões principais. Uma é que devemos começar com algo absolutamente claro, auto-evidente e confiável – como Aristóteles enfatizou. A outra é que nossos métodos de prova devem ser não somente diretos e verificáveis, mas também muito poderosos – devemos ser capazes de alcançar tudo.

O notável sucesso do método axiomático na geometria e na mecânica clássica bem atesta a profundidade das visões iniciais e o poder dos métodos de prova. O poder da lógica foi questionado, é verdade, mas os lógicos e matemáticos do século dezenove o resgataram com sobras, e complementaram as outras realizações axiomáticas com a axiomatização da própria lógica por Frege, assim como pela axiomatização da aritmética por Dedekind e Peano. Na virada do século a batalha parecia quase vencida.

Aí vieram os paradoxos. A auto-evidência e a clareza por trás da geometria euclidiana já haviam sido um tanto corroídas, mas os paradoxos foram o *coup de grace*. Além disso, por volta da mesma época o trabalho revolucionário de Einstein minava também as intuições por trás da mecânica clássica[2]. Tanto a matemática como a física teórica pareciam desmentir o respaldo do método de Aristóteles.

> Acima de tudo, foi dada ênfase à integridade intelectual da ciência e à importância da ciência como um modo de tentar determinar a natureza de todas as coisas – incluindo a mente humana. São estas tendências do positivismo lógico que eu gostaria de ver continuadas. Acredito que a tendência a reinterpretar a ciência filosoficamente, a qual foi sempre uma característica do empirismo, longe de ser um estímulo do trabalho metodologicamente correto que o empirismo e, no presente século, o positivismo lógico, inspiraram, foi a fonte principal de erro nestes movimentos. A ciência não precisa da interpretação positivista; mas, no espírito do melhor trabalho positivista, ela necessita muito de uma análise de seus métodos.

(2) Uma obra interessante, que enfatiza a continuidade entre Einstein e Newton, é Bondi *Relativity and Common Sense*. Ele comenta (pp. 167-168):

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

A lógica foi resgatada através da sintaxe, mas as intuições fundamentais sobre a realidade foram abandonadas. Ironicamente, o mais aristotélico a este respeito foi Brouwer. Ele aferrou-se à realidade e à idéia fundamental de que devemos começar a partir de intuições claras e auto-evidentes. Ele também se aferrou à idéia de que os métodos de prova deveriam ser diretos e verificáveis. Mas abandonou a lógica; pois a lógica, ou a que se passava por lógica, era para ele uma contrafação lingüística que representava incorretamente a natureza da realidade. Como Frege, Brouwer não tinha nenhuma simpatia pela linguagem e também a via como vestimenta para o pensamento – uma vestimenta feia e de caimento ruim[3]. Tivesse

---

> Isto conclui nosso breve panorama da Teoria da Relatividade. Espero ter mostrado que esta teoria, num momento considerada tão misteriosa, é na verdade a extensão mais óbvia e clara de idéias sobre o mundo comum ao domínio das altas velocidades. O que não é familiar nela o é apenas porque as altas velocidades não nos são familiares. Nenhuma outra abordagem poderia ter tornado o mundo das altas velocidades tão simples e tão inteligível.

(3) Em "Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism", Brouwer descreve o "primeiro ato do intuicionismo" como segue (pp. 140-141):

> [Ele] separa completamente a matemática da linguagem matemática, em particular do fenômeno de linguagem descrito pela lógica teórica, e reconhece que a matemática intuicionista é uma atividade da mente essencialmente alingüística que tem sua origem na percepção de uma mudança de tempo, i.e., da partição de um momento de vida em duas coisas distintas, uma das quais dá lugar à outra, mas é retida na memória. Se esta dois-idade [two-ity] é despida de qualquer qualidade, resta ali a forma vazia do substrato comum a todas as dois-idades. É este substrato comum, esta forma vazia, que é a intuição fundamental da matemática.

Ele então prossegue sumarizando sua atitude em relação à linguagem e à lógica (p. 141):

> No edifício do pensamento matemático assim erguido pelo autodesdobramento ilimitado da intuição fundamental, a linguagem não desempenha nenhum outro papel senão aquele de uma técnica eficiente, embora nunca infalível ou exata, para memorizar construções matemáticas e para sugeri-las a outras pessoas; de modo que a linguagem matemática por ela própria nunca pode criar novos sistemas matemáticos. Mas levan-

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

Brouwer se dirigido a Frege ao invés de Hilbert, poderia ter tido menos desprezo com relação à lógica[4]. Mas a idéia de que certeza, beleza e profundidade matemá-

---

do-se em conta o caráter altamente lógico da linguagem matemática usual a questão seguinte se apresenta naturalmente:

Suponhamos que uma construção matemática intuicionista foi cuidadosamente descrita por meio de palavras e, então, ignorando-se pelo momento o caráter introspectivo da construção matemática, sua descrição lingüística é considerada nela própria e sujeita a aplicação lingüística de um princípio da lógica clássica. É então sempre possível realizar uma construção matemática alingüística que encontre sua expressão na figura lógico-lingüística em questão?

Depois de um cuidadoso exame responde-se a esta questão afirmativamente (se levamos em conta a inevitável inadequação da linguagem como um modo de descrição) em relação aos princípios de contradição e do silogismo; mas negativamente (exceto em casos especiais) em relação ao princípio do terceiro excluído, de modo que este último, como um instrumento para a descoberta de verdades matemáticas novas, tem que ser rejeitado.

(4) Não sei se Brouwer alguma vez leu Frege. Na terceira parte ("Matemática e Lógica") de sua tese ele discute os pontos de vista de muitas pessoas – inclusive Russell, Peano e Couturat – mas não os de Frege. Não me recordo de ter jamais visto uma referência dele a Frege. Ainda assim Frege foi o único dentre os lógicos com quem Brouwer poderia ter encontrado a empatia necessária para a comunicação. Apesar de suas diferenças eles sustentaram visões bastante similares em relação a vários assuntos importantes. Ambos viam a linguagem como vestimenta para o pensamento e não lhe atribuíam um papel fundamental. É verdade que Frege pensava que a linguagem ordinária deveria ser substituída por uma notação conceitual mais adequada, mas isto não é realmente incompatível com o ponto de vista de Brouwer, na medida em que a notação conceitual não se torne um método "autônomo" para se obter verdades. E para Frege ela não era autônoma, mas uma representação da estrutura da realidade – ou de parte dela. O autodesdobramento ilimitado do substrato comum de Brouwer é uma estruturação da realidade matemática não muito diferente da concepção que Frege tinha desta realidade, e Brouwer tem que representá-lo de algum modo a fim de lidar com ele. A diferença essencial entre os dois reside no objetivismo de Frege e no subjetivismo de Brouwer no que concerne o âmbito desta estruturação. Mas mesmo ali eu sinto que a diferença não é tão grande, e reside em parte no modo de expressão escolhido por cada um deles. Além do mais, ambos tiveram que enfrentar fortes preconceitos e oposição a suas idéias, inclusive uma certa falta de reco-

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

ticas se encontram na manipulação de sinais era demais para ele. Por isso Brouwer não somente questionou a lógica aristotélica, mas também o método axiomático. Foi Heyting quem restaurou tanto a lógica como o método axiomático no intuicionismo. E lógicos como Kleene, Kreisel e Myhill começaram a desenvolver as idéias de Brouwer de um modo mais sistemático enfatizando o conteúdo específico e original de sua abordagem[5].

O enfoque principal, no entanto, era o enfoque sintático. Hilbert tentou eliminar o apelo aristotélico à auto-evidência e à noções básicas claras através de uma medida muito engenhosa, motivada por sua análise anterior da geometria. Não precisamos de noções básicas intuitivas porque as noções básicas estão implicitamente definidas pelos axiomas, e não precisamos de verdades auto-evidentes porque não existem noções independentes em relação às quais os axiomas sejam verdadeiros. O que precisamos é intuição e auto-evidência a respeito de aspectos fundamentais da sintaxe. Verdade tem que se tornar demonstrabilidade e os princípios fundamentais da verdade (e do ser) estabelecidos por Aristóteles são propriedades do formalismo. A consistência captura o princípio de contradição e a completude captura o princípio do terceiro excluído. Estes devem, ademais, ser aspectos demonstráveis do formalismo – pelo menos a consistência o é. Daí a metamatemática.

---

nhecimento do poder e da beleza de suas concepções, o que levou a uma radicalização nas formulações. A concepção de lógica de Frege não pode ser comparada com a de Boole ou a de Peano, por exemplo, não porque estas não tenham mérito, mas porque a de Frege tem um escopo inteiramente diferente. E o mesmo ocorre para uma comparação da concepção de Brouwer com a de Poincaré – como o próprio Brouwer observou em sua tese (*Collected Works 1*, p. 96). Frege e Brouwer podem ser um exemplo daquela antífona de palavras (não) intercambiadas à qual Brouwer se refere em "Consciousness, Philosophy and Mathematics", p. 1240.

(5) Ver Heyting *Intuitionism* para uma exposição, e *Axiomatic Projective Geometry* – o tema da tese de Heyting em 1925. O livro de Kleene *Introduction to Metamathematics* desempenhou um papel considerável enquanto uma apresentação sistemática de desenvolvimentos até 1952, seguido por *Foundations of Intuitionistic Analysis*, de Kleene e Vesey. Um texto muito importante foi o artigo de Kreisel "Foundations of Intuitionistic Logic", seguido por muitos outros. Myhill também publicou vários textos importantes.

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

Foi um projeto grandioso. A realidade, ou pelo menos o aspecto matemático da realidade, deve ser trocada pela sintaxe. Uma vez que já havia uma tendência a se trocar a realidade por construções subjetivas, melhor trocá-la por construções objetivas. Após algumas escaramuças iniciais o programa de Hilbert se tornou a filosofia da matemática dominante. O logicismo havia se tornado artificial e obscuro, em razão de várias medidas *ad hoc* introduzidas por Russell em *Principia Mathematica*, e o intuicionismo não parecia decolar no que dizia respeito à matemática real. Em 1930 Gödel provou que os métodos lógico-sintáticos usados por Hilbert eram suficientemente poderosos para obter todas as conseqüências dos axiomas; isto é, que a lógica de primeira ordem é completa no sentido que todas as conseqüências de primeira ordem podem ser obtidas por seus métodos de prova. Dado o que Hilbert e sua escola haviam feito até então, a batalha parecia quase vencida.[6]

Aí vieram os teoremas de incompletude de Gödel. Mesmo um dos mais simples aspectos matemáticos da realidade, a estrutura dos números naturais, não era de todo codificável sintaticamente. O método de Hilbert não podia capturar ambos os princípios aristotélicos da verdade. Além disso, mesmo se nos conformássemos com apenas a consistência, e mesmo se a consistência estivesse ali, a metamatemá-

---

(6) O cheiro da vitória já está claramente presente nas palavras conclusivas de Hilbert em "Foundations of Mathematics", p. 479:

> De minha apresentação vocês reconhecerão que é a prova de consistência que determina o escopo efetivo de minha teoria da prova e constitui em geral o seu núcleo. O método de W. Ackermann permite uma extensão ainda maior. Para os fundamentos da análise comum sua abordagem foi desenvolvida a ponto de restar somente a tarefa de levar a cabo uma prova puramente matemática de finitude. Neste momento eu já gostaria de declarar qual será o resultado final: a matemática é uma ciência sem pressuposições. Para fundamentá-la eu não preciso de Deus, como faz Kronecker, ou da suposição de uma faculdade especial de nosso entendimento harmonizada com o princípio da indução matemática, como faz Poincaré, ou da intuição primitiva de Brouwer, ou, finalmente, como fizeram Russell e Whitehead, de axiomas de infinito, redutibilidade ou completude, os quais são na verdade suposições conteudísticas que não podem ser compensadas por uma prova de consistência.

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

tica de Hilbert não poderia prová-la. Não se podia obter certeza demonstrável contra paradoxos, apenas a simples e comum certeza. Mas esta Frege também a tinha.[7]

(7) Minha apresentação do projeto de Hilbert foi um tanto superficial e talvez enganosa em alguns aspectos, mas não estou tentando desenvolver os detalhes aqui. Todavia, alguns comentários adicionais podem ajudar a evitar mal-entendidos.

A metamatemática era a parte conteudística da matemática, a ser suplementada por elementos (formais) ideais, cujo propósito era essencialmente facilitar a busca de resultados conteudísticos. Em sua formulação da lógica, Hilbert isola os aspectos mais abstratos da lógica (que ele chama 'transfinitos') no operador ε e suas regras. O operador ε corresponde ao artigo indefinido 'um' e é essencialmente um operador de escolha – o entendimento intuitivo de εxFx é: um x tal que Fx, se o há, e um objeto arbitrário em caso contrário. Isto permite a Hilbert definir os quantificadores $\exists xFx$ como $F(\varepsilon xFx)$, e $\forall xFx$ como $F(\varepsilon x\neg Fx)$. A idéia da prova de consistência a que Hilbert se refere no comentário que citei acima é a seguinte (nas palavras de Hilbert, p. 477):

> Ao provar consistência para a função ε o objetivo é mostrar que de uma dada prova de $0 \neq 0$, a função ε pode ser eliminada, no sentido de que os arranjos formados por meio dela podem ser trocados por numerais de tal modo que as fórmulas resultantes do axioma lógico da escolha por substituição, as "fórmulas críticas", se tornem fórmulas "verdadeiras" em virtude destas trocas.

O objetivo inicial de Hilbert era provar metamatematicamente a consistência de seu sistema formal para a aritmética, a qual ele supunha ser completa. Dessa maneira, ele não tentou explicitamente uma prova de completude, mas completude foi definitivamente um objetivo. Seu projeto de axiomatizar as várias partes da matemática não teria sido muito convincente se pudéssemos ter muitos sistemas formais, cada um dos quais respeitando a parte conteudística da matemática, mas conflitando uns com os outros na parte formal. Isto é precisamente o que o primeiro teorema de incompletude de Gödel mostra, no entanto. Além disso, a sentença indecidível de Gödel é uma sentença aritmética universal cujas instâncias são verdadeiras e verificáveis finitisticamente; deste modo, a incompletude é muito ruim. Significa que para cada numeral n pode-se provar um enunciado conteudístico Fn, mas não pode-se provar $\forall xFx$ (w-incompletude). E mais ainda, pode-se acrescentar consistentemente $\neg\forall xFx$ ao sistema formal – supondo que ele é consistente para começar.

É razoável, portanto, caracterizar o projeto de Hilbert como uma tentativa de substituir a noção de verdade pela noção de demonstrabilidade em um sistema formal. Foi uma tentativa sintática, porque as intuições básicas de Hilbert sobre a matemática eram sintáticas. A matemática con-

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

Apesar de não ter tido sucesso em suas metas filosóficas, o projeto sintático de Hilbert foi bem sucedido em suas metas matemáticas mais práticas. A teoria de conjuntos, assim como a teoria dos números, análise, álgebra, geometria, topologia

---

teudística desenvolve-se através de experimentos do pensamento baseados em intuições sobre algarismos e outros sinais – veja, por exemplo, "On the Foundations of Logic and Arithmetic", p. 131ff., "On the Infinite" p. 376ff., and "The Foundations of Mathematics" p. 464ff. Neste último ele diz (pp. 464-465):

> Não mais do que qualquer outra ciência pode a matemática ser fundamentada somente na lógica; antes, como uma condição para o uso de inferências lógicas e para a execução de operações lógicas, algo tem que nos ser dado em nossa faculdade de representação; certos objetos concretos extralógicos que são intuitivamente presentes enquanto experiência imediata anterior a todo o pensamento. Para que a inferência lógica seja confiável, deve ser possível considerar estes objetos completamente em todas as suas partes, e o fato de que eles ocorram, que difiram uns dos outros, que se sigam uns aos outros ou sejam concatenados, é imediatamente dado na intuição, juntamente com os objetos, como algo que não pode ser reduzido a outra coisa e nem requer redução. Esta é a posição filosófica fundamental que eu tomo como requisito para a matemática e, em geral, para qualquer pensamento, compreensão e comunicação em ciência. E em particular na matemática o que consideramos são os próprios signos concretos, cuja forma, de acordo com a concepção que adotamos, é imediatamente clara e reconhecível.

Para uma discussão mais extensa e bastante interessante do projeto de Hilbert, veja Kreisel "Hilbert's Programme".

Que o projeto de Hilbert não é filosoficamente incomum pode-se ver ao compará-lo com o fenomenalismo, por exemplo; especificamente com o que Hirst chama "fenomenalismo lingüístico" em "Phenomenalism". Os enunciados conteudísticos são aqueles sobre sensações, enquanto os enunciados ideais são aqueles sobre objetos materiais. O fenomenalismo, no entanto, se coloca uma meta muito forte; a saber, como formula Hirst, a de "fornecer traduções dos enunciados sobre objetos materiais em conjuntos equivalentes de enunciados sobre sensações" (p. 131). Isto é similar à tentativa de reduzir a matemática à metamatemática de uma forma direta. Mas pode-se pensar também nos enunciados ideais como acréscimos puramente formais para facilitar a obtenção de resultados sobre sensações. O apelo habitual à "possibilidade", por exemplo, pode ser visto como a contraparte fenomenalista do maquinário transfinito de Hilbert. Se alguém pudesse obter uma extensão consistente e completa dos enunciados conteudísticos por meio destes acréscimos, e pudesse

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

etc, foram axiomatizadas de maneiras naturais e elegantes. A confiança no valor e na consistência destas axiomatizações – aquelas que não se podem provar consistentes por meios metamatemáticos – era forte e crescente a cada dia. E daí que o projeto filosófico não deu certo? Uma pena, talvez, mas para todos os propósitos práticos o velho problema dos paradoxos havia sido resolvido. Hilbert não queria ser despejado do paraíso cantoriano e manteve-se firme em sua posição. A teoria de conjuntos estava ali para ficar. Não como uma formulação da teoria platônica das formas, mas como um instrumento matemático-formal de expressão e de prova. Os matemáticos podiam trabalhar formalmente com uma consciência razoavelmente tranqüila, mesmo que sem uma garantia definitiva.[8]

O primeiro resultado de incompletude de Gödel também afetou a concepção aristotélica original do método axiomático. A lógica de primeira ordem é muito mais rica do que a formulação de lógica do próprio Aristóteles, e se os axiomas forem dados de um modo efetivo e forem consistentes, e se a ciência em questão contiver uma pequena quantidade de aritmética, então não podemos alcançar tudo pelo método de Aristóteles. Deste modo, a falha filosófica não foi na verdade uma

---

mostrar conteudisticamente que ela é consistente e completa, teria tido sucesso em substituir a noção transcendental de verdade por uma noção imanente de verdade. Evidentemente, esta é apenas uma analogia, mas me parece útil para esclarecermos a conexão do projeto de Hilbert com outros projetos filosóficos. (A analogia poderia ser ainda desenvolvida em mais detalhes.) Para uma abordagem instrumentalista do projeto de Hilbert, veja Detlefsen *Hilbert's Program*.

(8) Os *Éléments de Mathématique*, de Bourbaki, é a versão moderna dos *Elementos*, de Euclides – como fica claro na introdução ao primeiro fascículo, sobre teoria dos conjuntos. A confiança é humana, no entanto (*Théorie des Ensembles*, p. 9):

> Acreditamos, em suma, que a matemática é destinada a sobreviver e que nunca veremos as partes essenciais de seu majestoso edifício colapsarem porque uma contradição insuspeita venha a se manifestar; mas não pretendemos que esta nossa opinião repouse em outra coisa que não nossa experiência. Não é suficiente, dirão alguns. Mas já faz vinte e cinco séculos que os matemáticos têm o hábito de corrigirem seus erros e de verem sua ciência se tornar mais rica e não mais pobre; isto lhes dá o direito de encarar o futuro com serenidade.

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

falha de Hilbert; sua sistematização tornou possível mostrar um resultado epistemológico e ontológico muito profundo sobre a estrutura da realidade e a possibilidade de a conhecermos.

O resultado de Gödel mostrou também que a axiomatização (de parte) da ciência primeira de Aristóteles, concebida como a lógica de ordem superior de Frege, tem que ser também incompleta na medida em que os métodos de prova forem efetivos (verificáveis). Portanto, o golpe de Gödel atingiu a Aristóteles com muito mais força do que a Hilbert. A abordagem honesta para a verdade e a realidade parece fadada ao fracasso. Auto-evidência e clareza provaram ser menos confiáveis do que Aristóteles pensava, e os métodos verificáveis de prova provaram ser menos poderosos do que Aristóteles pensava.

Que um ponto de partida seguro para a filosofia é uma miragem já se tornara claro através das eras – ou porque a alegada segurança não está realmente ali, ou porque não se pode ir muito longe sem a ajuda de métodos não-verificáveis. Não ajuda, por exemplo, trocar insights sobre a natureza da realidade por insights sobre a natureza da mente (ou do entendimento). Se estes insights têm algum poder, isto é, se eles nos dão uma estrutura com que começar, então eles são igualmente hipotéticos. E em ambos os casos haveria o problema de como chegar de um ao outro – isto é, se se quer mesmo chegar de um ao outro. A grande esperança era imitar os métodos da matemática e da física teórica, e estes eram essencialmente os métodos de Aristóteles.

O que os paradoxos mostraram foi que mesmo insights a respeito de aspectos matemáticos e lógicos da realidade envolvendo verdade e alguns traços muito gerais da realidade não eram completamente confiáveis. Três alternativas principais foram consideradas. A primeira era trocar estes insights por outros a respeito da natureza do entendimento ou da mente, mais ou menos ao longo de linhas kantianas. Foi esta a escolhida por Poincaré, Brouwer e Weyl. O insight inicial de Brouwer era um insight sobre o tempo e sobre a estruturação derivada deste. A segunda alternativa foi a de Hilbert – mais tarde abraçada por Weyl. Os insights iniciais eram insights espaciais finitos que pudessem dar conta da sintaxe – e Hilbert também se refere a Kant (“On the Infinite”, p. 376). A terceira alternativa era

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

a de Russell. Esta era uma mistura de coisas, mas seu traço epistemológico mais distintivo com respeito às outras duas era a justificativa não-apriorística do axioma da redutibilidade. Ele não tinha nenhuma necessidade intrínseca, mas era justificado no que parecia dar os resultados certos e não parecia levar a paradoxos – uma justificativa pragmática, indutiva.[9]

Nenhuma destas se mostrou inteiramente convincente. A de Hilbert pelas razões que já mencionei. A de Brouwer porque por um bom tempo foi vista como uma posição negativa que não tinha muito poder matemático. Era essencialmente equiparada em poder à metamatemática finitista de Hilbert. A de Russell porque sua abordagem era muito confusa como estava formulada; era construída sobre suposições filosóficas aparentemente *ad hoc* e conflitantes.

---

(9) Esta foi a justificativa de Russell (*Principia Mathematica 1*, p. 59):

> Que o axioma da redutibilidade é auto-evidente é uma proposição que dificilmente pode ser mantida. Mas na verdade auto-evidência nunca é mais do que parte das razões para se aceitar um axioma e nunca é indispensável. A razão para se aceitar um axioma, como para se aceitar qualquer outra proposição, é sempre em grande parte indutiva, nomeadamente que muitas proposições que são quase indubitáveis podem ser dele deduzidas, e que nenhuma maneira igualmente plausível é conhecida pela qual estas proposições pudessem ser verdadeiras se o axioma fosse falso, e que nada que é provavelmente falso pode ser deduzido dele. Se o axioma é aparentemente auto-evidente isto significa apenas, na prática, que ele é quase indubitável; pois algumas coisas foram pensadas serem auto-evidentes e, no entanto, mostraram-se falsas. E se o axioma ele próprio é quase indubitável, isto apenas se acresce à evidência indutiva derivada do fato de que suas conseqüências são quase indubitáveis: isto não fornece evidência nova de um tipo radicalmente diferente. Infalibilidade nunca é alcançável e, portanto, algum elemento de dúvida deve sempre acompanhar todo axioma e todas as suas conseqüências. Na lógica formal o elemento de dúvida é menor do que na maioria das ciências, mas não é ausente, como fica demonstrado a partir do fato dos paradoxos seguirem-se de premissas das quais não se sabia previamente demandarem limitações.

Para uma apresentação mais detalhada da visão de Russell, ver Chihara *Ontology and the Vicious-Circle Principle*.

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

Depois dos resultados de Gödel em 1931 tornou-se claro que o intuicionismo de Brouwer não podia ser equiparado em força com a metamatemática de Hilbert. Era possível mostrar a consistência da aritmética clássica de primeira ordem através de simples traduções para a aritmética intuicionista de primeira ordem.[10] Se os insights fundamentais de Brouwer garantiam a última, garantiam também a primeira. Isto eventualmente levou a um exame mais profundo dos novos elementos que Brouwer havia introduzido na matemática, tais como a noção de seqüência indefinidamente estendível (ou seqüência de livre escolha) e de certos argumentos de feitio metamatemático envolvidos na sua prova do teorema da barra [bar theorem].[11] Levou também a uma investigação mais profunda da lógica intuicionista. O

---

(10) Isto foi feito por várias pessoas: Glivenko, Gödel, Gentzen, Bernays, entre outros. Ver Kleene *Introduction do Metamathematics*, § 81.

(11) Em "Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism", Brouwer comenta (p.142):

> Vimos anteriormente como o primeiro ato do intuicionismo afetou a matemática clássica de duas maneiras: Em primeiro lugar, em razão do desaparecimento do fundamento lógico para o continuum, uma parte tão grande se torna ilusória que essencialmente restam apenas as partes separáveis da álgebra e da teoria dos números; em segundo lugar, mesmo nesta porção restante, muitos capítulos baseados no princípio do terceiro excluído têm que ser rejeitados. Sob estas circunstâncias pode-se recear que a matemática intuicionista tenha necessariamente que ser pobre e anêmica, e que, em particular, não tenha lugar para a análise. Mas este receio teria pressuposto que as seqüências infinitas geradas pelo desdobrar-se intuicionista da intuição original teriam que ser seqüências fundamentais, isto é, seqüências infinitas predeterminadas que, como as clássicas, procedem de tal maneira que, desde o início, o *m*-ésimo termo está fixado para cada *m*. Todavia, tal não é o caso; ao contrário, um campo muito mais amplo de desenvolvimento que inclui a análise e em muitos lugares excede bastante as fronteiras da matemática clássica é aberto pelo
>
> Segundo Ato do Intuicionismo
>
> o qual reconhece a possibilidade de gerar novas entidades matemáticas:
>
> primeiro, na forma de seqüências indefinidamente estendíveis p_1 , p_2 , ..., cujos termos

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

problema era que estas coisas eram um tanto incomuns do ponto de vista matemático usual. Mas começaram a serem desenvolvidas e levaram a uma interessantíssima prova relativa de consistência para a análise clássica. A conclusão, no entanto, foi que a base intuicionista para a prova não era realmente garantida pelas intuições originais.[12]

> são escolhidos de forma mais ou menos livre entre entidades matemáticas previamente adquiridas; de tal modo que a liberdade de escolha existente talvez para o elemento p_1 possa estar sujeita a uma restrição permanente em algum p_ν subseqüente, e reiteradamente a restrições permanentes mais fortes ou mesmo à abolição em p_ν's subseqüentes,* enquanto todas estas intervenções restritivas, assim como as escolhas dos próprios p_ν's, podem em qualquer estágio ser tornadas dependentes da experiência matemática futura possível do sujeito criador;
>
> segundo, na forma de espécies matemáticas, isto é, propriedades atribuíveis a entidades matemáticas previamente adquiridas e que satisfaçam a condição de que se valem para uma certa entidade matemática, então valem também para todas as entidades matemáticas que tiverem sido definidas como iguais a ela, relações de igualdade tendo que ser simétricas, reflexivas e transitivas; entidades matemáticas previamente adquiridas para às quais se aplica a propriedade são chamadas elementos da espécie.
>
> (Nota*. Em publicações anteriores algumas vezes eu admiti restrições de liberdade também com relação a restrições adicionais de liberdade. Contudo esta admissão não é justificada por uma introspecção mais acurada e, além disso, colocaria em perigo a simplicidade e o rigor de desenvolvimentos posteriores.)

(12) O artigo fundamental é Spector "Provable Recursive Functionals of Analysis: A Consistency Proof of Analysis by an Extension of Principles Formulated in Current Intuitionistic Mathematics". O artigo foi editado por Kreisel e, numa nota final (p.27), Gödel comenta sua importância e o fato de que Spector havia planejado dar boa parte do crédito a Kreisel. Este, por sua vez, menciona que Spector "apreciou muito suas discussões com P. Bernays e K. Gödel sobre o tema do presente texto." (p. 2 nota).

Na p. 2, Spector comenta:

> A característica menos construtiva de $\sum_4$ é a recursão barra [bar recursion], que define um funcional por meio de uma recursão sobre uma classe bem-fundada de funcionais.

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

Vários avanços similares – alguns relacionados ao trabalho sobre o intuicionismo, outros não – foram feitos em conexão com o programa de Hilbert. Ampliando a concepção de metamatemática de várias maneiras foi possível provar a consistência da aritmética de primeira ordem. E a reação de Bernays aos teoremas de incompletude de Gödel foi precisamente esta, expandir a concepção de metamatemática. O problema era que esta expansão não deveria ser uma expansão meramente técnica, mas baseada em alguns insights filosóficos significativos.[13]

> Esta é a única característica de $\sum_4$ que não é obviamente intuicionista. Se isto é ou não um princípio intuicionista é um tópico discutível neste estágio de desenvolvimento da matemática intuicionista. Tanto Bernays como Gödel expressaram a opinião de que com base no que os intuicionistas já aceitaram (p. ex., o teorema da barra), a recursão barra deveria ser também aceitável. O autor acredita que o teorema da barra é ele próprio questionável, e que até que se possa dar a este teorema uma fundamentação adequada é prematuro discutir se a recursão barra é intuicionista.

E Kreisel acrescenta numa nota:

> Este ponto de vista de que o teorema da barra carece de uma fundamentação adequada é quase universal e não é inconsistente com aquele expressado por Bernays e Gödel. Pois eles presumivelmente querem dizer que qualquer princípio geral que estabelecesse o teorema da barra em um arcabouço formal adequado estabeleceria também a indução barra [bar induction] de 6.3 e, portanto, a recursão barra.

(13) Ver Bernays “Sur les Questions Méthodologiques Actuelles de la Théorie Hilbertienne de la Démonstration”. A metodologia de Hilbert foi estendida por Gentzem e outros para obter provas de consistência para a aritmética de primeira ordem.

Em um breve sumário de uma palestra, “Revision of the Programme of Proof Theory”, Bernays comenta (p. 40):

> A fim de lidar com esta linha de desenvolvimento parece que temos que revisar, em princípio, o programa da teoria da prova, especialmente com relação à oposição entre os métodos a serem provados consistentes e aqueles a serem usados para a argumentação da teoria da prova. A questão aqui não é somente o quanto admitir, mas como a aludida oposição deve ser propriamente considerada. ... Não precisamos começar, como fez Brouwer, de um ponto de vista determinado acerca da origem do conhecimento matemático. Parece ao contrário suficiente ter em conta as circunstâncias de

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

Em conexão com a solução de Russell havia três atitudes principais. Uma era simplificar eliminando tudo exceto a hierarquia simples de tipos. Esta, que foi basicamente a idéia de Ramsey, era essencialmente uma solução platônica e significava um retorno a algo semelhante à concepção original de Frege.[14] A segunda era aceitar claramente as características construtivistas da hierarquia ramificada de Russell, derivadas da aceitação do princípio do círculo vicioso, e eliminar as carac-

---

> que entre os matemáticos não há unanimidade sobre o que temos que aprender das antinomias da teoria de conjuntos, e que mesmo depois que métodos precisos para a teoria de conjuntos foram estabelecidos, alguns matemáticos não se sentem satisfeitos. ... Assim a tarefa é traçar uma linha entre o que aceitar como intuitivo e o que tratar como meramente teórico.

Em seu texto "On a Hitherto Unexploited Extension of the Finitary Standpoint", o qual serviu de fundamento aos resultados de Spector, Gödel comenta (p. 133):

> P. Bernays salientou repetidas vezes que, tendo em vista o fato de que não podemos provar a consistência de um sistema por métodos de prova restritos suficientemente para serem representados dentro do próprio sistema, temos que passar para fora da metamatemática finitista (no sentido de Hilbert) a fim de provar a consistência da matemática clássica, ou mesmo a consistência da teoria clássica dos números. Desde que a metamatemática finitista é definida como aquela que repousa sobre evidência inspecionável, isto significa ... que a fim de provar a consistência da teoria dos números precisamos de certos conceitos abstratos. Para este propósito devemos contar como abstratos (não inspecionáveis) aqueles conceitos que são essencialmente de segunda ordem ou de ordem superior. Por estes entendemos aqueles que não compreendem propriedades ou relações de objetos concretos (como p. ex. combinações de símbolos), mas aqueles que dizem respeito a construções do pensamento (provas, proposições com sentido etc.). A prova de consistência usará insights destas construções do pensamento, insights que são derivados não das propriedades combinatórias (espaço-temporais) das combinações de símbolos que representam as provas, mas somente do sentido destes símbolos.

(14) Ver o ensaio que dá o título à coletânea *The Foundations of Mathematics*. Na verdade, a posição de Ramsey é bastante diferente da de Frege, mas os detalhes não são relevantes para os meus propósitos neste momento.

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

terísticas pragmáticas *ad hoc* – o que significava principalmente abandonar o axioma da redutibilidade. Russell seguiu esta linha na introdução da segunda edição de *Principia*. A terceira, que foi a atitude dos positivistas lógicos, era tomar a teoria simples de tipos e interpretá-la nominalística e lingüisticamente. Isto era possível devido à teoria das não classes de Russell e ao seu tratamento das funções proposicionais como sentenças abertas, que era derivada de sua teoria das descrições. Assim, o logicismo de Frege se tornou, via Russell e os positivistas, um logicismo nominalista-lingüístico. A lógica e a matemática são lingüísticas, e o mundo é feito de particulares. E esta foi a solução ao tradicional problema empirista de como lidar com a matemática e a lógica.

Nas mãos dos positivistas o método axiomático se tornou o método hipotético-dedutivo, inspirado por Hilbert. É direto no que a noção de dedução envolvida – dedução lógica – é direta e verificável, mas não é direto na medida em que é verdadeiramente hipotético. Não era restrito aos aspectos mais teóricos da ciência, ainda que estes fossem os exemplos principais, mas era para ser aplicado em geral. Todo conhecimento, aprendizado e explicação são hipotético-dedutivos. O domínio do testar e da evidência é a experiência, concebida de modo mais ou menos restrito. As noções teóricas eram vistas como construtos cujo significado era dado pelos axiomas. Elas não tinham conteúdo independente e, portanto, não poderia haver nenhum insight real a seu respeito. Nenhum axioma tem qualquer tipo de necessidade intrínseca – a não ser que seja analítico, em cujo caso não é necessário como axioma, exceto na lógica (e na matemática). Era, na verdade, a idéia de Hilbert sobre matemática transposta para o mundo natural e juntada ao empirismo.

Aí Gödel apresentou seu próprio diagnóstico. Ele distinguiu os paradoxos da teoria de conjuntos dos paradoxos da lógica, e sustentou que os primeiros se deviam à confusão entre conjuntos enquanto unidades, obtidos a partir de uma multiplicidade por meio da operação de abstração *conjunto de*, e conjuntos enquanto extensões de propriedades ou conceitos. A primeira era considerada a concepção de Cantor, a segunda a de Frege. No que concerne à matemática, mantém Gödel, tudo que precisamos é de uma multiplicidade bem definida para começar, da qual conjuntos possam ser gerados por iterações da operação *conjunto de*. Supor que isto

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

tem que chegar a um fim com um conjunto universal é simplesmente um erro – algo como supor que deve haver um maior número natural que possa ser alcançado pela operação *sucessor de*. E supor que cada propriedade ou condição determina um conjunto neste sentido é tanto injustificado como um erro, como mostram os paradoxos. O que podemos supor é que, dado um conjunto, então qualquer condição "bem-definida" determinará um subconjunto daquele conjunto. Este era o axioma de subconjuntos definidos de Zermelo. Mas, obviamente, estes não seriam os únicos subconjuntos do conjunto.[15]

---

(15) Em "What is Cantor's Continuum Problem?", pp. 262-263, Gödel diz:

> Para alguém que considera que objetos matemáticos existem independentemente de nossas construções e de os intuirmos individualmente, e que exige apenas que os conceitos gerais matemáticos devam ser suficientemente claros para podermos reconhecer sua correção e a verdade dos axiomas que lhes concernem, existe, acredito, uma fundamentação satisfatória para a teoria de conjuntos de Cantor em toda a sua extensão e significado originais, a saber, a teoria axiomática de conjuntos interpretada da maneira esboçada abaixo.
>
> Pareceria num primeiro momento que os paradoxos da teoria de conjuntos sentenciariam um tal empreendimento ao fracasso, mas uma investigação mais acurada mostra que não causam nenhum problema. Eles são um problema muito sério não para a matemática, no entanto, mas, ao contrário, para a lógica e a epistemologia. Na medida em que conjuntos ocorrem na matemática (pelo menos na matemática de hoje, que inclui toda a teoria de conjuntos de Cantor), eles são conjuntos de números inteiros, ou de números racionais (i.e., de pares de números inteiros), ou de números reais (i.e., de conjuntos de números racionais), ou de funções de números reais (i.e., de conjuntos de pares de números reais), etc. ... Esta noção de conjunto, entretanto, de acordo com a qual um conjunto é uma coisa obtenível a partir dos inteiros (ou a partir de outros objetos bem definidos) pela aplicação iterada da operação "conjunto de", e não algo obtido da divisão da totalidade de todas as coisas existentes em duas categorias, tal noção nunca levou a qualquer antinomia de qualquer tipo; ou seja, o trabalho ingênuo e não-crítico com esta noção de conjunto mostrou-se até agora ser completamente autoconsistente. (Nota. Segue-se imediatamente desta explicação do termo "conjunto" que um conjunto de todos os conjuntos, ou outros conjuntos de uma extensão similar, não podem existir, uma vez que todo conjunto obtenível deste modo imediatamente

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

No entanto, com relação aos paradoxos da lógica, aqueles que derrubaram o sistema de Frege, Gödel toma uma atitude inteiramente diferente. Eles mostram que nossa percepção da verdade e da realidade (o ser) é defeituosa.[16] Nós não "vemos" claramente e isto é um problema muito sério para a epistemologia e para a lógica. É um grande golpe para Aristóteles e Leibniz porque mostra que nossas intuições fundamentais não são suficientes para erigir os axiomas. Não se segue daí, contudo, que não possamos eventualmente vir a ver as coisas claramente, mas teremos que trabalhar duro para isso. As próprias intuições devem ser elaboradas e talvez tenhamos também que apelar a justificações mais pragmáticas para obtermos sucesso.

O ponto de vista de Gödel a respeito tanto de conjuntos como de conceitos é platônico; são entidades reais, não construções. Ele sugere algumas maneiras alternativas de se pensar a natureza dos mesmos, mas não desenvolve nenhuma delas de modo sistemático. Epistemologicamente, no entanto, sugere duas abordagens diferentes. Uma é adotar algo semelhante à idéia de Russell em conexão com o axioma da redutibilidade; ou seja, justificar um axioma apelando às suas conseqüências, especialmente conseqüências elementares verificáveis. Mesmo que não vejamos diretamente a verdade de um axioma, ou que não a vejamos com suficiente clareza, o axioma pode ter justificação indireta suficiente para ser tomado como um axioma. Parte desta justificação indireta pode vir de conseqüências verificáveis do axioma, especialmente em domínios elementares como a aritmética. Outra parte pode vir

---

> dá lugar a novas aplicações da operação "conjunto de" e, portanto, à existência de conjuntos maiores.)

Ver Wang *From Mathematics to Philosophy*, para uma apresentação mais detalhada destas idéias.

(16) Referindo-se a Russell, Gödel diz ("Russell's Mathematical Logic", pp. 215-216):

> Ao analisar os paradoxos aos quais a teoria dos conjuntos de Cantor nos conduziu, ele os livrou de todas as tecnicalidades matemáticas, trazendo então à luz o assombroso fato de que nossas intuições lógicas (i.e., intuições a respeito de noções como: verdade, conceito, ser, classe etc.) são autocontraditórias.

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

de outras considerações mais gerais, tais como poder unificador para métodos e resultados, uniformidade e riqueza da teoria como um todo, etc. Gödel vê esta abordagem como exatamente análoga ao que acontece ao se formular uma teoria física do mundo natural.[17]

A outra abordagem envolve um apelo direto à verdade. Pode-se introduzir uma certa classe de axiomas cuja estrutura é clara e decidível e se dizer que

---

(17) Ver "What is Cantor's Continuum Problem?", pp. 264-265 e 270-272. Em sua resenha de *The Philosophy of Bertrand Russell* (onde o texto de Gödel sobre Russell foi originalmente apresentado), Weyl ataca duramente a atitude platônica de Gödel (p. 212):

> Gödel, com sua confiança básica na lógica transcendental, gosta de pensar que nossa ótica lógica está apenas ligeiramente fora de foco e espera que após alguma pequena correção nós possamos ver nitidamente, e então todos concordarão que vemos corretamente. Mas quem não compartilha desta confiança ficará incomodado pelo alto grau de arbitrariedade envolvida em um sistema como *Z*, ou mesmo no sistema de Hilbert. Qual é a fé que o sustenta? Sucesso apenas não pode ser a resposta. Quão muito mais convincentes e próximos dos fatos são os argumentos heurísticos e as subseqüentes construções sistemáticas na teoria da relatividade geral de Einstein, ou na mecânica quântica Heisenberg-Schrödinger! Uma matemática verdadeiramente realista precisa ser concebida, em acordo com a física, enquanto um ramo de construção teórica do mesmo mundo real, e precisa adotar a mesma sobriedade e cautela com relação a extensões hipotéticas de seus fundamentos que a física exibe. A física teórica de hoje está num estado mais saudável do que a matemática. Mas nem Gödel nem eu podemos oferecer sugestões concretas para uma cura, embora pareça que Gödel espera encontrar pistas num cuidadoso estudo das notas de Leibniz em seu projeto de uma *characteristica universalis*.

É muito injusto, no entanto, acusar Gödel de ter tomado uma atitude irreal em relação à matemática e de não ter visto esta disciplina em pé de igualdade com a física teórica enquanto tentativas paralelas de compreender o mesmo mundo real. Apesar de não ter evidência, sempre pensei que os textos de Gödel sobre relatividade eram parcialmente dirigidos a este comentário de Weyl – ver "A Remark About the Relationship Between Relativity Theory and Idealistic Philosophy", que foi a contribuição de Gödel ao volume sobre Einstein da série Schilpp. "What is Cantor's Continuum Problem?" também foi publicado depois da resenha de Weyl e neste texto Gödel elucida seu ponto de vista de várias maneiras que me parecem relacionadas à controvérsia.

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

uma proposição pertence à classe se tiver aquela estrutura e for *verdadeira*. Isto significa que o sistema axiomático (ou o conceito de prova) não é mais formal no sentido de Hilbert, porque se uma proposição é ou não um axioma não é mais uma característica sintaticamente decidível do sistema. Contudo, esta classe de proposições, que é suplementar aos nossos axiomas, não é arbitrária. Deve haver uma motivação clara, intuitiva, intrínseca para escolhê-la. No caso da teoria de conjuntos, as proposições são axiomas de infinito que fazem suposições fortes quanto às iterações possíveis da operação fundamental de abstração *conjunto de*. E, naturalmente, pode-se também usar a abordagem anterior para justificar a verdade de axiomas específicos.[18]

---

(18) Gödel diz ("Remarks Before the Princeton Bicentennial Conference on Problems in Mathematics", p. 85):

> Consideremos, p. ex., o conceito de demonstrabilidade. É bem sabido que, de qualquer modo que o tornemos preciso por meio de um formalismo, a consideração deste mesmo formalismo dá lugar a novos axiomas que são exatamente tão evidentes e justificados quanto aqueles com que começamos, e que este processo de extensão pode ser iterado ao transfinito. Logo não pode existir qualquer formalismo que abrace todos estes passos; mas isto não exclui que todos estes passos (ou pelo menos todos aqueles que dão algo novo para o domínio de proposições no qual estamos interessados) possam ser descritos e coletados juntos em algum modo não-construtivo. Na teoria de conjuntos, p. ex., as extensões sucessivas podem ser mais convenientemente representadas por axiomas de infinito mais e mais fortes. É certamente impossível dar uma caracterização decidível e combinatória do que seja um axioma de infinito, mas pode haver, p. ex., uma caracterização do tipo seguinte: Um axioma de infinito é uma proposição que tem uma certa estrutura formal (decidível) e que, além disso, é verdadeira. Um tal conceito de demonstrabilidade pode ter a propriedade de fechamento requerida, i.e., pode ser verdadeiro o seguinte: Qualquer prova para um teorema de teoria de conjuntos na teoria de conjuntos de ordem superior imediatamente acima (i.e., qualquer prova envolvendo o conceito de prova que acabei de usar) é substituível por uma prova a partir de um axioma de infinito. Não seria impossível que para um tal conceito de demonstrabilidade algum teorema de completude valesse, que diria que toda proposição exprimível na teoria de conjuntos é decidível a partir dos axiomas atuais mais alguma afirmação verdadeira sobre a grandeza do universo de conjuntos.

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

As recomendações epistemológicas de Gödel adicionam força ao método original de Aristóteles mediante o enfraquecimento da exigência de que seja direto. Ainda é uma abordagem honesta para a verdade e a realidade, mas num modo mais tortuoso uma vez que basicamente aceita as idéias epistemológicas gerais de Russell em conexão com a justificação do axioma da redutibilidade. Era claro a partir dos resultados de incompletude, no entanto, que não havia maneira de manter o método intacto. Com isto em mente, retornemos ao início, e às noções de prova e dedução lógica.

Uma vez que a metodologia de Hilbert era sintática, a própria noção de prova foi se tornando mais e mais dissociada da noção de verdade. Hoje em dia provamos correção e completude, mas isto é algo adicional e só se tornou uma prática comum depois do desenvolvimento da teoria de modelos. Um sistema incorreto de dedução é ainda um sistema de dedução, apenas incorreto. Apesar de na prática preservação da verdade ser considerada uma condição necessária para se adotar um sistema de dedução, ela não é considerada uma característica intrínseca da dedução. As características intrínsecas são puramente sintáticas: principalmente efetividade e finitude.

Na verdade não há nenhuma razão intrínseca para que a finitude seja imposta à sintaxe. As estruturas sintáticas usadas pelos lógicos são essencialmente aspectos da estrutura dos números naturais, como foi bem demonstrado por Gödel, e são, portanto, altamente abstratas. Porém, como a sintaxe é abstraída da linguagem real, e como a comunicação lingüística é, de fato, finita, se é naturalmente levado à idéia de que expressões e provas têm que ser finitos. Além disso, as intuições iniciais de Hilbert eram intuições sobre arranjos finitos de objetos.

De início os requisitos de finitude e efetividade serviam para manter as pessoas honestas; é essencialmente isto que Church alega em favor dos mesmos.[19] É

(19) Church argumenta como se segue (*Introduction to Mathematical Logic*, p. 53):

> Considere a situação que tem lugar se a noção de prova não é efetiva. Não há então meios seguros pelos quais, quando uma seqüência de fórmulas é proposta como uma

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

uma concepção justificante de prova. Se você mantém que tem uma prova de S a partir do conjunto de hipóteses A, então eu devo ser capaz de verificar sua reivindicação conclusivamente. Conseqüentemente, finitude e efetividade são condições necessárias da prova. Inversamente, porém, na medida em que suas provas são finitas e efetivas, posso checá-las conclusivamente. Portanto, finitude e efetividade são condições suficientes da prova. Se nossa concepção de prova é puramente sintática e justificante, então isto pode ser como deveria ser.

Não parece ocorrer a quase mais ninguém que a prova também é um método de descoberta para se alcançar a verdade e a compreensão. E se ocorre, isto não é considerado ser parte da lógica, mas da psicologia. Esta é uma lição que todo mundo declara ter aprendido com Frege; a lógica não tem nada que ver com a psicologia. Quantos alunos de cursos de lógica já não ouviram que, se eles querem aprender como pensar, escolheram o curso errado? (Eu mesmo devo ter dito isto centenas de vezes.)

Mas por que deveria a busca pela verdade e a compreensão ser parte da psicologia? Frege ficaria horrorizado com tal idéia, assim como Aristóteles. Descobrir a estrutura da realidade é um assunto muito sério para eles, e a prova é o instrumento primordial para isso. A prova é tão exploratória quanto justificante. De que outro modo poderíamos chegar à verdade? Podemos precisar de um ponto de partida não-provado, sem dúvida, mas como devemos prosseguir a partir dele?

---

prova, alguém possa determinar se de fato ela é uma prova. Logo, este alguém pode razoavelmente exigir uma prova, em qualquer situação dada, de que a seqüência de fórmulas proposta é uma prova; e até que esta prova suplementar seja fornecida, ele pode se recusar a ser convencido de que o teorema alegado está provado. Ao que parece, esta prova suplementar deveria ser considerada como uma parte da prova total do teorema, e a base primitiva do sistema lógico deve ser modificada de modo a fornecer tal prova, ou algo de equivalente. Na verdade, é essencial à idéia de uma prova que, para qualquer um que admita as pressuposições em que ela é baseada, ela proporcione convicção final. E os requisitos de efetividade podem ser pensados como servindo precisamente para preservar esta característica essencial da prova.

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

Que a lógica deve nos ensinar como pensar não significa que é uma investigação empírica de como as pessoas de fato pensam, usando-se questionários e sabe-se lá mais o quê, que é o que se tem em mente quando se diz aos alunos que eles escolheram o curso errado. Significa que, entre outras coisas, a lógica investiga a noção de prova, e como a prova deve conduzir à verdade e à compreensão, assim como à justificação.

Como uma ferramenta exploratória, e mesmo como uma ferramenta justificante, a prova não é tão simples quanto os lógicos normalmente acreditam; e tentar representar todas as provas como seqüências lineares finitas de passos sintáticos efetivos é uma distorção quase inacreditável. Vou resumir os aspectos principais desta distorção.

Para começar, a prova não é nem linear nem finita. Se vemos como um número infinito de passos – todos eles justificados por nossas suposições básicas, ou insights, ou resultados prévios, em relação ao domínio peculiar de investigação – leva a uma conclusão desejada, temos uma prova. Naturalmente, desejaremos expressar isto de um modo finito, já que este é o único modo no qual podemos expressar qualquer coisa. Mas nossa expressão finita pode simplesmente descrever a prova infinita.

Isto é muito claro em provas envolvendo o axioma da escolha, que é um princípio infinito de prova. De fato, este foi o ponto de toda a controvérsia que o envolve. Zermelo supunha que, dada uma coleção infinita de conjuntos, ele poderia escolher de cada um deles um elemento bem definido, e a objeção era que, em geral, ele não poderia dar uma regra para fazer tais escolhas. O fato de que podemos expressar o axioma em termos de uma função extensional que realiza a escolha para nós não é nada mais que uma expressão do princípio infinito – precisamente por isto a objeção em termos de regras. Além disso, ninguém nega que o axioma da escolha foi um fantástico instrumento de descoberta e justificação, tanto antes como depois de sua formulação explícita. E, como Kreisel salientou com relação à prova de Brouwer para o teorema da barra, o axioma usual de indução matemática é também um princípio infinito de prova.[20] A matemática e a lógica estão

(20) Ver “On the Domains of Definition of Functions”, ou “Points and Spaces”. Kreisel faz os seguintes comentários sobre isto (“Luitzen Egebertus Jan Brouwer, 1881-1996”, p. 58):

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

repletas deles. A ilusão de que não é assim se baseia no fato de que descrevemos estes princípios em termos finitos, apelando a noções de ordem superior tais como quantificadores e funções extensionais.

Portanto, não há razão para não introduzirmos explicitamente na lógica princípios infinitos de prova, na medida em que possamos descrevê-los efetivamente (ou de alguma maneira razoável). E podemos sempre nos desfazer deles em favor de formulações finitas de ordem superior. O que significa que estamos apelando a noções lógicas mais abstratas, mas não significa que estamos eliminando o caráter infinito dos princípios em questão. Se, contudo, restringimos os meios de expressão na troca, então nosso princípio finito não precisa capturar toda a força do princípio infinito original – como na indução de primeira ordem. Por isso, parece-me perfeitamente legítimo e esclarecedor considerar estruturas infinitas de prova na lógica e na matemática, e os lógicos que estão fazendo isso não deveriam se sentir desconfortáveis a respeito.

Em segundo lugar, provas exploratórias não são compostas de passos simples elementares verificáveis, mas sim de passos complexos já reconhecidos como corretos, de analogias, de insights, de figuras etc. Uma vez que não se pode estar certo de não se ter bobeado em algum lugar, o que se faz é elaborar os detalhes de tal modo a satisfazer a si e aos seus pares. É claro que alguém pode ser influenciado pelas concepções correntes sobre como uma prova deve ser, ou por preconceitos filosóficos, mas verificabilidade algorítmica raramente entra na elaboração. Em ocasiões especiais a prova pode ser revolucionária, no sentido de ir contra as con-

Mas talvez a idéia mais surpreendente tenha sido a insistência de Brouwer de que provas, ou seja, os atos mentais envolvidos ao se estabelecer uma proposição matemática geral, devem ser analisados como uma seqüência *transfinita* de passos. Isto é bastante natural se lembrarmos como cada um de nós convenceu-se na escola da validade do princípio de indução: infira $\forall n A(n)$ se for provado $A(0)$ e $\forall n[A(n) \rightarrow A(n+1)]$, ou diferentemente (se estivermos acostumados a pensar em sistemas formais), se nos recordarmos de como nos convencemos de que a regra formal correspondente expressa um princípio válido de inferência.

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

cepções correntes. Já havia uma grande controvérsia com relação a provas puramente existenciais quando Zermelo deu sua prova do teorema da boa ordenação, mas o axioma da escolha realmente trouxe a controvérsia à luz do dia.[21]

Finalmente, mesmo se em princípio todas as provas matemáticas pudessem ser expressas na forma das seqüências lineares de prova da lógica de primeira ordem, isto só é interessante como um resultado teórico e não significa que estas seqüências são provas ou que possam substituir provas. As pessoas atribuem peso demais a estas reduções em princípio e tiram delas conclusões filosóficas que me parecem totalmente injustificadas.

A concepção usual de prova e dedução lógica também tem conseqüências bastante implausíveis noutros domínios que não a lógica e a matemática. Uma vez que a dedução lógica é tida por universal, as pessoas acabam acreditando que qualquer tipo de prova tem que ser redutível a estas seqüências finitas verificáveis. E mais, que se não forem de tal modo redutíveis não são realmente provas. Isto leva à tentativa absurda de analisar provas e problemas filosóficos, por exemplo, em termos de lógica de primeira ordem, do que resulta nada mais que trivialidades. Sem dúvida, existem argumentos filosóficos famosos cuja estrutura pode ser vista como válida mesmo por meio tão somente da lógica proposicional, mas que eu saiba, nunca houve uma aplicação significativa da lógica à filosofia nessa direção. Na verdade, tal prática é contra-produtiva, pois leva à conclusão natural de que a lógica é não só irrelevante para a filosofia, como também filosoficamente insignificante.

Infelizmente, há alguns filósofos-lógicos que estão dispostos a aceitar esta conclusão, e que ainda se orgulham disto. Eles mantêm que a lógica é uma disciplina matemática puramente formal que não tem nenhum conteúdo filosófico intrínseco. Eles se dizem parte da irmandade dos matemáticos, onde as coisas são feitas de modo correto e preciso. Mas se aborrecem quando outros filósofos objetam com razão que o que eles estão fazendo não é de modo algum lógica, mas ape-

(21) Ver Moore *Zermelo's Axiom of Choice*.

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

nas uma manipulação formal sem significado, ainda que engenhosa e interessante enquanto tal.

Quando alguém tenta aplicar métodos lógicos ordinários a tipos mais mundanos de prova, a situação é ainda pior. Considere julgamentos judiciais, por exemplo.[22] Temos aqui um caso concreto da experiência cotidiana onde queremos alcançar verdade e compreensão. Que queremos compreensão segue-se do fato de que não é considerado satisfatório pôr o acusado de frente a um oráculo, não importa o quão confiável, que o proclame culpado ou inocente sem qualquer explicação.[23] É muito claro para mim que um julgamento tem que ser uma prova. Além disso, é finito e tem alguns elementos de verificabilidade. Não é, contudo, nem poderia ser, uma abordagem direta para a verdade e a compreensão. E não o seria mesmo se todos, inclusive o acusado, fossem absolutamente honestos. Suponha, por exemplo, que o acusado atropelou um pedestre enquanto dirigia à noite. A situação pode ser tão complexa que não fica de modo algum claro para ninguém onde reside a responsabilidade. Se todos fossem absolutamente honestos, as regras de um julgamento seriam diferentes, mas o princípio fundamental não o seria tanto, e um julgamento ainda seria o meio mais seguro para se obter verdade e compreensão.

Uma vez que tenhamos nos dado conta de que a abordagem direta e estritamente verificável para a verdade e a compreensão não funciona mesmo em matemática e em lógica, a conclusão natural é procurar uma concepção mais ampla de prova que seja geral o bastante para cobrir, senão todos, a maioria dos casos. Não se segue disto que tenhamos desistido da abordagem direta e mais estrita onde ela funciona bem. As várias sugestões que reuni acima a respeito da epistemologia da matemática foram todas projetadas para manter as provas tão diretas e verificáveis quanto possível, mas em muitos casos os padrões rigorosos estabelecidos por

(22) Ver a discussão no Capítulo 21 de *Logical Forms, Part II*. Nesta discussão estou me referindo a julgamentos no sistema legal criminal norte-americano.

(23) Infelizmente, tais métodos de prova foram usados no passado, por vezes de modo bastante doloroso, como nos ordálios medievais.

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

Aristóteles têm que ser relaxados de um modo ou de outro. E quando passamos a outras ciências, à filosofia e ao conhecimento em geral, me parece que o modelo de julgamentos é melhor para se erguer uma teoria geral da prova.

Se esta teoria geral tem que ter algumas das características de uma teoria lógica (universal), então é essencial ter uma noção adequada da forma e uma representação abstrata das estruturas da prova que nos permita teorizar a respeito. O conceito de prova foi sempre formal, no sentido de que a meta de uma prova não é só alcançar a verdade, mas alcançá-la através de uma estrutura cujo valor seja independente de se alcançar aquela verdade particular. Cada prova deve ser um modelo para outras provas, pelo menos dentro de um certo âmbito. Nas disciplinas onde provas não são formais neste sentido houve pouco progresso teórico porque não é possível generalizar. E para provas serem formais deve haver uma análise razoavelmente abstrata de premissas, passos e conclusões, e de suas possíveis conexões com a realidade.

Se uma conclusão é uma conseqüência lógica de premissas verdadeiras, isto deve significar não somente que a conclusão é verdadeira, mas também que sua verdade é garantida tão somente pela forma lógica. Desde que as premissas são verdadeiras, então denotam estados de coisas que são partes localizadas da estrutura da realidade – esta porção da estrutura da realidade é determinada pela forma lógica das premissas e por seus conteúdos específicos. Que a conclusão é uma conseqüência lógica das premissas significa, portanto, que ela também denota um estado de coisas e que a existência desta estrutura local adicional da realidade é garantida pela porção de estrutura determinada pelas premissas. O propósito de uma prova lógica é mostrar isto. E o faz mostrando genericamente que qualquer estruturação do tipo expresso pelas premissas garante a existência de uma estruturação do tipo expresso pela conclusão. Portanto, com provas deste tipo, partindo de premissas verdadeiras, discernimos cada vez mais a estrutura da realidade, o que era justamente a idéia de Aristóteles.

Consideremos o *Modus Ponens*: De φ e de $\varphi \rightarrow \psi$, infira ψ. Se interpretarmos o condicional como uma asserção condicional de verdade, então a verdade das premissas realmente garante a verdade da conclusão, mas não da maneira sugerida

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

acima. Nossa segunda premissa é uma condição sobre a realidade, não uma estruturação desta. Contudo, em casos particulares, podemos interpretá-la como uma estruturação.

Por exemplo, de

(1) $[[Fx](x)](a)$

e

(2) $[[Fx \rightarrow Gx](x)](a)$,

temos uma inferência lógica para

(3) $[[Gx](x)](a)$.

Mas isto, na verdade, não é o *Modus Ponens* – ou, pelo menos, é uma forma algo diferente desta regra. Portanto, o sentido no qual o *Modus Ponens* é uma regra formal de inferência não é o sentido de garantir a verdade em virtude da forma lógica. Que sentido é este?

Se eu sei que Maria foi ao cinema somente se Pedro foi ao cinema, eu sei que uma certa relação vale entre duas proposições, ou sentenças. A relação é que "Maria foi ao cinema" é verdadeira somente se "Pedro foi ao cinema" é verdadeira. Mesmo que eu não seja capaz de analisar a estrutura específica destas sentenças em termos do que deve ser exatamente a estrutura da realidade para cada uma delas ser verdadeira, eu posso dar uma análise estrutural do argumento por *Modus Ponens*. A saber, usando o exemplo anterior de um modo diferente, de

(4) $[[Vp](p)]('Fa')$

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

e

(5) $[[Vp \rightarrow Vq](p, q)]$(‘$Fa$’, ‘$Ga$’),

se infere

(6) $[[Vq](q)]$(‘Ga’).

Isto significa que se a realidade satisfaz as condições (4) e (5), então ela tem que satisfazer também a condição (6), apesar de eu poder não saber exatamente como a realidade deva ser para satisfazer qualquer uma estas condições. De certo modo, esta formulação é mais geral que a anterior, e se eu sei que F e G são propriedades, e que a é um objeto, então (1)-(3) pode ser considerado um caso especial de (4)-(6). Mas se eu não sei disso, tudo que eu tenho são condições, não estruturações.

As provas lógicas usuais provam somente que se certas condições são satisfeitas, então outras condições são satisfeitas. Isso é bastante claro na lógica proposicional e não poderia ser de outro modo uma vez que não se tem uma análise das proposições elas mesmas. Mas mesmo na lógica de predicados a situação é similar, pois não se tem uma análise explícita da forma lógica em sua relação com a realidade.

Na matemática a estruturação que as sentenças localizam na realidade é bastante clara, em parte porque as noções envolvidas são claras, de modo que é possível interpretar as hipóteses de um teorema em termos de estruturação. E assim é, na verdade, como se pensa a respeito. Usamos figuras, diagramas e nossa imaginação para entender mais precisamente como deve ser a situação considerada na hipótese e prosseguimos daí. A teoria de conjuntos é maravilhosa a este respeito porque nos dá uma representação mais concreta das formas lógicas. A teoria dos conjuntos não é bem lógica, mas é algo assim como um reflexo concreto da lógica em estruturas ideais que são puramente extensionais. Esta é a razão por que em matemática se pode extrair tanto da lógica, e em mais nenhum outro lugar.

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

E se pode fazer o mesmo em matemática intuicionista, embora não por meio da noção clássica de conjunto. As intuições iniciais de Brouwer põem "em movimento" uma estruturação bastante abstrata da realidade que pode ser adicionalmente desenvolvida mediante atos livres do sujeito criador. Como a verdade só se dá na experiência, uma hipótese a respeito de uma alegada estruturação da realidade só pode ser entendida em termos das possibilidades de se experienciar esta estruturação. Além disso, como as estruturações envolvidas são freqüentemente infinitas, não há razão por que a estrutura do próprio experienciar possível não devesse ser descrita em termos de uma estrutura infinita. E se se pode estabelecer que qualquer experienciar possível daquela estruturação hipotética deve ter um certo tipo de estrutura, parece perfeitamente legítimo levar isto em conta. É precisamente o que Brouwer faz na prova do teorema da barra, e toda a estratégia está conectada com suas concepções de realidade, de verdade e de experiência, assim como com sua interpretação de asserções condicionais.[24]

Para que nossas estruturas amplas de prova se tornem mais formais, devemos ser capazes não só de ampliar as condições de prova, assim como as relações que devem vigorar entre as premissas e a conclusão, mas também de compreender melhor a estruturação da realidade envolvida nas proposições e nas suas conexões. Consideremos a prova indutiva, por exemplo.

Tornou-se lugar comum aceitar o dito de Hume de que não há conexões necessárias entre fatos. Eu discordo. Tenho argumentado acima que há conexões lógicas entre fatos, e estas são conexões necessárias. Mas as conexões derivam da forma dos fatos, não dos próprios fatos. Além disso, todos supõem que há uma conexão necessária entre humanidade e mortalidade; não foi apenas por algum acidente cósmico que todo ser humano de que temos noticia morreu dentro de um certo limite de tempo – exceto por alguns que ainda estão bem dentro deste

(24) Ver Brouwer "On the Domains of Definition of Functions" e outros textos citados acima. Em *Intuitionism*, pp. 42-46, Heyting dá uma apresentação comentada da prova do teorema do leque [fan theorem] – que envolve idéias similares. As considerações no texto não são para justificar o teorema da barra enquanto tal, mas somente para tornar a estratégia geral plausível.

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

limite. Tomamos estes fatos particulares como evidência de que há algum tipo de conexão necessária, embora não se siga disto que estejamos certos. Evidentemente, a conexão não pode ser meramente uma conexão entre fatos particulares de um certo tipo e um fato geral; a conexão tem que residir na natureza da humanidade e da mortalidade. E pode ser que as pessoas já entendam suficientemente bem a estrutura biológica dos seres humanos para compreenderem que a mortalidade é uma característica necessária dos mesmos. Mas suponha que não. Queremos então algum tipo de estrutura de prova que nos permita estabelecer, mesmo com alguma dúvida, a conclusão geral de que todos os homens são mortais a partir dos fatos particulares em questão.

Claramente não é uma questão de probabilidades, mas de evidências – embora probabilidades possam estar envolvidas de alguma maneira. E é também claro que não iremos conseguir uma prova direta a partir destes fatos particulares, enquanto premissas, para aquela conclusão, porque os fatos particulares são apenas parte da evidência. O caráter das propriedades (ou predicados) é realmente essencial para a prova. A estrutura da prova não pode ser algo como:

De

(7) $Fa \,\&\, Ga$, $Fb \,\&\, Gb$, $Fc \,\&\, Gc$, ...,

infira

(8) $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$.

Com ou sem probabilidades uma tal estrutura de prova seria ridícula neste caso. E pensar que ao adicionar mais fatos particulares conseguimos uma probabilidade mais alta parece bastante implausível. Goodman se deu conta disso e sugeriu uma explicação muito mais interessante da estrutura possível de tais

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

provas.[25] Embora haja algumas ambigüidades na sua abordagem, e também algumas limitações que se seguem de seu ponto de vista nominalista, isto não tira nada do mérito de que sua concepção da estrutura de prova é um salto qualitativo em relação à estrutura (7)-(8).[26] Todavia, não acho que a concepção seja boa o suficiente. É preciso uma explicação melhor a respeito do que é que se está querendo provar – e isto envolve essencialidade, ou intrinsicalidade, ou algo assim – e é necessário mais do que apenas entrincheiramento [entrenchment] para servir como evidência adicional.

No caso da mortalidade dos humanos, o que nós supomos é que para cada um deles há uma conexão necessária entre o fato de ser humano e o fato de ser mortal. Esta é uma conexão necessária entre fatos particulares, e supomos que ela depende de algumas características intrínsecas do ser humano; i.e., que mortalidade é uma conseqüência necessária disto. A quantificação universal

(9) $\forall x(x$ é humano $\rightarrow x$ é mortal),

i.e.,

(10) $[[\forall x(Wx \rightarrow Zx)](W, Z)]$(‘$x$ é humano’, ‘x é mortal’),

não expressa uma conexão necessária, mas antes, a subordinação das propriedades em termos de suas extensões. Se não temos uma compreensão clara da estrutura biológica e de como ela leva (ou pode levar) à mortalidade, então nos conformamos com esta conexão extensional.

(25) Ver *Fact, Fiction, and Forecast*, especialmente o capítulo 4.

(26) Para uma discussão mais extensa da teoria da projeção de Goodman, ver o capítulo 21 de *Logical Forms*, *Part II*.

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

Isto não significa, no entanto, que estamos tentando provar (9) a partir de uma evidência da forma

(11) Platão foi um homem & Platão morreu, Aristóteles foi um homem & Aristóteles morreu, etc.

Nossa evidência é em parte que todo homem nascido até um certo número de anos atrás morreu, o que é um fato geral; que embora em muitos casos isto foi claramente acidental, em muitos outros não foi; que a propriedade de ser humano tem várias características intrínsecas e que mortalidade pode muito bem ser uma delas; que a propriedade de ser humano se relaciona com muitas outras propriedades similares com algumas das mesmas características; etc. É a partir de toda esta evidência, que pode ser bastante confusa e obscura em certos respeitos, que inferimos (9). Não inferimos explicitamente uma conexão necessária entre humanidade e mortalidade, mas chegamos perto.[27]

Tradução: Fábio François*

(27) Algumas vezes o problema da indução é equiparado ao problema de encontrar uma função que corresponda (ou quase) a um certo número de pontos num gráfico. Mas este é um problema completamente diferente; embora dependa de como os pontos foram determinados. Se tudo o que temos são pontos, no entanto, então obviamente não há aqui uma questão sobre conexões necessárias, mas sobre simplicidade, naturalidade da correspondência, etc.

(*)[N. do T.: Não poderia assinar esta tradução sem observar que foi essencial para meu trabalho o auxílio do próprio autor, o qual fez importantes correções e pensou as soluções mais elegantes.]

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

RESUMO

Na parte inicial do texto considero várias perspectivas epistemológicas sobre os problemas de fundamentos levantados pelos paradoxos da lógica e da teoria de conjuntos no início do século vinte. Esta discussão está centrada, principalmente, nos pontos de vista de Russell, Hilbert, Brouwer e Gödel. A parte final do texto consiste de um breve exame de questões filosóficas sobre a noção de prova.

Palavras-chave: método axiomático, prova, conhecimento, lógica, fundamentos da matemática, Russell, Hilbert, Brouwer, Gödel

ABSTRACT

In the initial part of the text I consider various epistemological approaches to the foundational issues raised by the paradoxes of logic and set theory at the beginning of the twentieth century. This discussion is mainly centered on the views of Russell, Hilbert, Brouwer, and Gödel. The final part of the text contains a brief examination of some specific philosophical issues concerning the notion of proof.

Keywords:axiomatic method, proof, knowledge, logic, foundations of mathematics, Russell, Hilbert, Brouwer, Gödel

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

Referências Bibliográficas:

ACHINSTEIN, P. e BARKER, S. F. (Eds.) *The Legacy of Logical Positivism*. Baltimore: The Johns Hopkins Press, 1969.

BENACERRAF, P. and PUTNAM, H. (Eds.) *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964.

BERNAYS, P. "Sur les Questions Méthodologiques Actuelles de la Théorie Hilbertienne de la Démonstration". Em GONSETH.

_______ "Revision of the Programme of Proof Theory". Resumo de uma conferência.

BONDI, H. *Relativity and Common Sense: A New Approach to Einstein*. New York: Doubleday, 1964. Reimpresso, New York: Dover, 1980.

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

BOURBAKI, N. *Théorie des Ensembles*. Paris: Hermann, 1939.

BROUWER, L. E. J. *On the Foundations of Mathematics*. Em *Collected Works*, vol. 1.

_______ "On the Domains of Definition of Functions". Em VAN HEIJENOORT.

_______ "Consciousness, Philosophy, and Mathematics". *Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy*. Amsterdam: North-Holland, 1949. Reimpresso em *Collected Works*, vol. 1.

_______ "Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism". *South African Journal of Science 49*, 1952. Reimpresso em *Collected Works*, vol. 1.

_______ "Points and Spaces". *Canadian Journal of Mathematics 6*, 1954. Reimpresso em *Collected Works*, vol. 1.

_______ *Collected Works*, 2 volumes. Amsterdam: North-Holland, 1975.

CHATEAUBRIAND, O. *Logical Forms. Part I: Truth and Description*. Campinas: Unicamp, 2001.

_______ *Logical Forms*. *Part II: Language, Logic, and Knowledge*. Campinas: Unicamp, 2005.

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

CHIHARA, C. S. *Ontology and the Vicious-Circle Principle*. Ithaca: Cornell University Press, 1973.

DAVIS, M. (Ed.) *The Undecidable*. Hewlett, N.Y.: Raven Press, 1965.

DETLEFSEN, M. *Hilbert's Program*. Dordrecht: Reidel, 1986.

GÖDEL, K. "The Completeness of the Axioms of the Functional Calculus of Logic". Em VAN HEIJENOORT.

_______ "On Formally Undecidable Propositions of *Principia Mathematica* and Related Systems I". Em VAN HEIJENOORT.

_______ "Russell's Mathematical Logic". In SCHILPP *The Philosophy of Bertrand Russell*. Reimpresso em BENACERRAF and PUTNAM.

_______ "What is Cantor's Continuum Problem". *The American Mathematical Monthly 54*, 1947. Revisado em BENACERRAF and PUTNAM.

_______ "Remarks Before the Princeton Bicentennial Conference on Problems of Mathematics". Em DAVIS.

_______ "A Remark About the Relationship Between Relativity Theory and Idealistic Philosophy". Em *Collected Works II*.

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

_______ "On a Hitherto Unexploited Extension of the Finitary Standpoint". Em *Collected Works II.*

_______ "The Present Situation in the Foundations of Mathematics". Em *Collected Works III.*

_______ *Collected Works*, 5 volumes. Oxford: Clarendon Press, 1986-2003.

GOODMAN, N. *Fact, Fiction, and Forecast*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1955.

HEYTING, A. *Intuitionism*. Amsterdam: North-Holland, 1956.

_______ *Axiomatic Projective Geometry*. Amsterdam: North-Holland, 1963.

HILBERT, D. "On the Foundations of Logic and Arithmetic". Em VAN HEIJENOORT.

_______ "On the Infinite". Em VAN HEIJENOORT.

_______ "The Foundations of Mathematics". Em VAN HEIJENOORT.

HIRST, R. J. "Phenomenalism". *The Encyclopedia of Philosophy*, vol. 6. EDWARDS, P. (Ed.) *The Encyclopedia of Philosophy*. New York: Macmillan, 1967.

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

KLEENE, S.C. *Introduction to Metamathematics*. Princeton: van Nostrand, 1952.

_______ and VESEY, R. E. *Foundations of Intuitionistic Analysis*. Amsterdam: North-Holland, 1965.

_______ *Mathematical Logic*. New York: Wiley, 1967.

KREISEL, G. "Hilbert's Programme". *Dialectica 12*, 1958. Revisado em BENACERRAF and PUTNAM.

_______ "Foundations of Intuitionistic Logic". In *Logic, Methodology and Philosophy of Science: Proceedings of the 1960 International Congress*. Stanford: Stanford University Press, 1962.

MOORE, G. H. *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development, and Influence*. New York: Springer, 1982.

PUTNAM, H. "Logical Positivism and the Philosophy of Mind". Em ACHINSTEIN and BARKER.

RAMSEY, F. P. *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*. London: Routledge, 1931.

SPECTOR, C. "Provable Recursive Functionals of Analysis: A Consistency Proof of Analysis by an Extension of Principles Formulated in Current In-

ANALYTICA
volume 11
número 1
2007

tuitionistic Mathematics". *Recursive Function Theory. Proceedings of Symposia in Pure and Applied Mathematics*, vol. 5. Providence: American Mathematical Society, 1962.

VAN HEIJENOORT, J. (Ed.) *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1967.

WANG, H. *From Mathematics to Philosophy*. New York: Humanities Press, 1974.

WEYL, H. Resenha de *The Philosophy of Bertrand Russell*. *American Mathematical Monthly 53*, 1946.

WHITEHEAD, A. N. and RUSSELL, B. *Principia Mathematica*, 3 volumes. Cambridge: Cambridge University Press, 1910-1913.