O REALISMO ESTRUTURAL ONTOLÓGICO E O PROBLEMA DAS RELAÇÕES SEM OS RELATA

ANALYTICA
volume 14
número 1
2010

William Steinle
UNIFAI

1. Introdução

Existem ao menos duas versões do realismo estrutural, a epistemológica e a ontológica ou metafísica. *Grosso modo*, o realismo estrutural epistemológico sustenta uma divisão entre estrutura e conteúdo, e diz que só podemos conhecer a *estrutura* do mundo exterior, mas nada de seu conteúdo; de um modo mais radical, o realismo estrutural ontológico irá dizer que só podemos conhecer a estrutura do mundo porque *só existem* estruturas, essa versão nega a divisão estrutura/conteúdo.

As origens do realismo estrutural epistemológico em filosofia da ciência são controversas. Alguns pensadores, como John Worrall (Worrall, 1989), Stathis Psillos (Psillos, 1995, 2001) e Ioannis Votsis (Votsis, 2004), por exemplo, remontam as origens do realismo estrutural epistemológico aos trabalhos de Henry Poincaré, Pierre Duhem e Bertrand Russell. Já outros, como Demopoulos e Friedman (Demopoulos e Friedman, 1985), também apontam alguns trabalhos de Moritz Schlick e Rudolph Carnap como tendo algumas características dessa versão do realismo estrutural; tais interpretações, todavia, não são unânimes. Como é bem sabido, Poincaré, por exemplo, é mais conhecido por adotar uma postura *empirista* em seus escritos filosóficos

ANALYTICA
volume 14
número 1
2010

e, portanto, seria melhor "classificado", digamos, como anti-realista. Embora alguns trechos da obra do pensador francês possam sugerir uma postura estrutural – o que, até certo ponto, não é difícil de ser sustentado –, seguida de expressões como "relações reais" e "relações verdadeiras", por exemplo, isso não seria suficiente para que atribuíssemos o epíteto de "realista estrutural" a esse filósofo, pois essas expressões – identificadas em seus contextos – seriam insuficientes para se defender uma interpretação *realista*, mesmo sendo um suposto "realismo de relações". Otávio Bueno, por exemplo, vê Poincaré não como um "realista estrutural", mas sim como um possível precursor do que denomina "empirismo estrutural" (Bueno 1999, pp. 230-237). Essa mesma questão poderia também ser levantada no tocante à interpretação da filosofia de Duhem, Schlick e Carnap; já no caso de Russell, ela seria, até certo ponto, menos polêmica. Deixando de lado essas questões, o comum acordo é que a teoria do realismo estrutural (epistemológico) propriamente dita teria surgido nos trabalhos de Grover Maxwell – quem inclusive teria fundado o termo – nas décadas de 1960 e 1970.

Em seus trabalhos sobre o realismo estrutural, Maxwell foi bastante influenciado pela filosofia de Russell (especialmente de seu trabalho de 1927), a quem atribui a origem da teoria; segundo Worrall, seus argumentos teriam como base a abordagem sintática às teorias científicas (Worrall, 1989). Não houve, na época, até onde sabemos, uma discussão sobre essa teoria de Maxwell, e ela permaneceu esquecida até Worrall resgatá-la em seu, agora clássico, artigo de 1989.

A versão ontológica do realismo estrutural teria aparecido pela primeira vez, na atualidade, em um artigo de James Ladyman (Ladyman, 1998), seguido de trabalhos em parceria com Steven French (French e Ladyman 2003, 2003a). A partir do artigo de Worrall e da proposta de uma versão ontológica do realismo estrutural, inaugurou-se uma discussão sobre essa teoria que vem ganhando cada vez mais espaço na atual literatura filosófica.

Não é nosso objetivo, neste artigo, adentrar nessas questões históricas, que interessam mais a um trabalho que esteja interessado em traçar as origens do realismo estrutural, o que certamente não é o nosso caso. Neste artigo, iremos discutir uma questão crucial que foi levantada contra os defensores do realismo estrutural ontológico. A nosso ver, sem uma solução a essa questão, torna-se praticamente impossível qualquer defesa dessa teoria. Procederemos então da seguinte maneira. Na segunda seção, faremos uma breve exposição das principais idéias do realismo estrutural ontológico; na terceira, veremos qual a noção de estrutura que está por

ANALYTICA
volume 14
número 1
2010

trás dessa teoria; na quarta, será levantado o problema das relações sem os *relata*; discutiremos então na quinta seção uma proposta de solução parcial do problema através da noção de quase-relação, definida na teoria de quase-conjuntos; e, na sexta seção, faremos um primeiro estudo do cálculo de relações, esse talvez possa ser visto como um primeiro passo para termos uma "completa eliminação dos *relata*". Essa última seção é a primeira parte de um estudo mais amplo, a ser desenvolvido em um outro trabalho, sobre a possibilidade de se erigir estruturas em um sistema de teoria de conjuntos sem variáveis individuais. Assim, concluiremos o artigo com uma sugestão – e, decididamente, não mais do que isso – de como essas estruturas poderiam ser encaradas nesses sistemas.

2. O realismo estrutural ontológico

Como mencionado acima, na atualidade, o realismo estrutural ontológico foi primeiramente apresentado em um artigo de Ladyman, publicado em 1998, e melhor articulado em artigos posteriores escritos em parceria com French. Do artigo original de Ladyman, podemos destacar ao menos três aspectos que diferenciam a sua "nova" versão do realismo estrutural daquela tradicionalmente considerada até então. Esses três aspectos podem ser apresentados através de três questões: 1) em que sentido o realismo estrutural ontológico difere do realismo estrutural tradicional? 2) qual a abordagem mais adequada para dar suporte ao realismo estrutural? E 3) qual a noção de estrutura que o realismo deve adotar? No que segue, ocuparemos de responder, baseados em Ladyman, cada uma dessas questões.

Em seu artigo, Ladyman sugere que o realismo estrutural não deve ser interpretado como sendo uma abordagem estrutural ao realismo científico. Essa interpretação daria margem a vários problemas, desde a "objeção de Newman" – considerada como uma das primeiras e principais objeções ao realismo estrutural (Demopoulos e Friedman 1985) –, até as críticas de Psillos. A chamada "objeção de Newman", apresentada pelo matemático Maxwell H. A. Newman em 1928, foi dirigida contra o "realismo estrutural" de Russell, em especial àquele presente em sua obra *A Análise da Matéria*, de 1927. *Grosso modo*, a objeção diz que, se todo o nosso conhecimento do mundo exterior for restrito às *propriedades* das relações entre objetos, e não às próprias relações, o máximo que poderemos conhecer do mundo é a sua *cardinalidade* – ou seja, o seu número de objetos –, e nada mais, o que tornaria o realismo estrutural uma teoria trivial

ANALYTICA
volume 14
número 1
2010

(Newman 1928; ver também Demopoulos e Friedman *op. cit.*). Russell, em uma carta a Newman, aceitou a objeção, e lamentou não a ter percebido (Russell 1968, p. 176). No entanto, os defensores subseqüentes do realismo estrutural, como Maxwell, parecem não ter dado a devida atenção a esse problema, o que foi feito apenas por Demopoulos e Friedman décadas mais tarde, apresentando-o como uma das principais objeções ao realismo estrutural.

Além dessa objeção, Ladyman também considera aquelas feitas por Psillos como evidenciando que o realismo estrutural epistemológico é inadequado. Ele alega que, se essa teoria for entendida como uma abordagem estrutural ao realismo, como o faz o realismo estrutural epistemológico, então o realismo científico tradicional já é uma espécie de realismo estrutural. Essa posição seria, por exemplo, aquela forma de realismo estrutural encontrada nos trabalhos de Russell e Maxwell. Para Ladyman, essa posição seria inadequada aos problemas para os quais ela foi destinada resolver (Ladyman 1998). Em particular, diz ele que Psillos, entre outros realistas, afirma que o realismo científico tradicional já é uma espécie de realismo estrutural, no seguinte sentido: o realismo científico tradicional afirmaria que a "natureza" de algo consiste em suas propriedades básicas, e as equações expressam as leis às quais elas obedecem. Assim, a natureza da massa, por exemplo, não seria nada mais do que sua obediência a algum conjunto de leis expressas através das equações descritas estruturalmente. Qualquer tentativa de defesa da existência de algo além das propriedades, segundo Psillos, nos remeteria às discussões medievais sobre formas e substâncias – que não seriam capazes de descrição estrutural –, discussões essas que teriam sido superadas pela revolução científica; assim, a "natureza" de algo seria essencialmente estrutural. Não havendo nada além da estrutura, o realismo estrutural epistemológico colapsaria (Psillos 1995; Ladyman *op. cit.*; French e Ladyman *op. cit.*).

Esta objeção só é possível se considerarmos a suposição, muitas vezes implícita nas discussões sobre o realismo estrutural, de que há uma distinção entre conteúdo e estrutura. O argumento de Psillos, também adotado por Ladyman, é o de que esse conteúdo é de origem essencialmente metafísica e que, portanto, está além das considerações científicas. Ladyman viu então nesta questão uma forte objeção à versão epistemológica do realismo estrutural, mas também uma forte motivação para a sua versão ontológica dessa teoria. De fato, diz ele, não existe esse "conteúdo": *tudo* o que há são estruturas. Não apenas podemos *conhecer* do mundo apenas as estruturas, e nada além, como sustenta o realismo estrutural epistemológico, mas,

ANALYTICA
volume 14
número 1
2010

argumenta, *não existe* nada além da estrutura. Se esse conteúdo for entendido em termos de "objetos", então a afirmação é a de que devemos entendê-los estruturalmente, ou seja, tudo é reduzido às estruturas. Essas, ontologicamente falando, seriam as entidades fundamentais. Portanto, diz Ladyman, o realismo estrutural deve ser visto como uma teoria metafísica radical que defende uma ontologia de estruturas, e não como uma abordagem estrutural ao realismo científico tradicional.

Em segundo lugar, de acordo com Ladyman, a abordagem mais adequada ao realismo estrutural deveria ser a semântica, ou modelo-teórica (*model-theoretical*), e não a sintática. Além de a abordagem sintática conduzir a versão epistemológica do realismo estrutural a vários pseudoproblemas, como a objeção de Newman, ela falharia por vários motivos, entre eles, Ladyman destaca os seguintes. O realismo estrutural propõe-se a ser uma teoria voltada para as teorias físicas da matéria, em especial, a teoria quântica. Segundo Ladyman, a abordagem sintática não é capaz de dar suporte a essa teoria. Ele toma como exemplo a questão da equivalência teórica entre a mecânica matricial de Werner Heisenberg e a mecânica ondulatória de Erwin Schrödinger, equivalência essa que não poderia ser adequadamente descrita através da abordagem sintática, mas que se ajustaria perfeitamente segundo os moldes da abordagem semântica (Ladyman *op. cit.*). Uma análise adequada dessa questão foge aos objetivos deste artigo, mas vale observar que Ladyman não é muito convincente em sua argumentação. Em geral, diz ele que a abordagem sintática se ocupa de trazer pseudoproblemas para as discussões em filosofia da ciência. Primeiro, porque seria uma ilusão pensar que as teorias científicas são desenvolvidas como sistemas axiomáticos elaborados em uma linguagem lógica de primeira ordem (com igualdade) parcialmente interpretada e, em segundo lugar, as regras de correspondência seriam inadequadas. A abordagem semântica, conclui Ladyman, não só oferece uma interpretação adequada da equivalência teórica, mas também reflete muito melhor a atividade científica do que a abordagem sintática.

Uma vez que o realismo estrutural surge como uma teoria voltada para a análise de teorias físicas altamente"matematizadas", e torna a referência às equações matemáticas e à estrutura dessas teorias indispensável, então faria mais sentido adotarmos o ponto de vista semântico para dar suporte aos futuros desenvolvimentos do realismo estrutural (Ladyman *op. cit.*). A adoção dessa abordagem refletirá na resposta à nossa terceira questão mencionada acima, a da natureza da estrutura.

ANALYTICA
volume 14
número 1
2010

É bastante evidente, ou pelo menos deveria ser, que qualquer que seja a versão do realismo estrutural, essa não pode prescindir de uma adequada noção de *estrutura*. Sobre ela falaremos mais detidamente a seguir. Por ora, queremos investigar qual noção de estrutura pode ser a que está por trás da proposta de Ladyman. Essa também não é uma noção que foi explicitamente explorada por ele. Como veremos na próxima seção, há diversas maneiras de se definir estrutura, em especial estrutura *matemática*. Como Ladyman deseja adotar a abordagem semântica para suportar a sua versão do realismo estrutural, é de se supor – e, infelizmente, só isso – que a noção de estrutura à qual está interessado é a *conjuntista*, uma vez que essa abordagem geralmente – mas, enfatizamos, não necessariamente – é associada a uma teoria de conjuntos. Além do mais, Ladyman, e posteriormente, French e Ladyman, irão sugerir o uso de *estruturas parciais*, originalmente formuladas também em uma teoria de conjuntos (Ladyman *op. cit.*; French e Ladyman 2003). Em termos gerais, a adoção de estruturas parciais permitiria capturar ambas as relações, entre teorias físicas e teorias matemáticas, e entre teorias físicas e modelos de dados. Essas estruturas incorporariam um elemento de abertura (*openness*) dentro da representação das teorias via a introdução das chamadas "relações parciais". Com respeito às relações intrateóricas, as estruturas parciais poderiam capturar precisamente o elemento de continuidade através da mudança de teorias, o que é desejado pelo realismo estrutural, e particularmente oferecer a possibilidade de acomodar exemplos dessas continuidades que vêm sendo descritas como aproximadas ou parciais (French e Ladyman 2003; da Costa e French 2003, cap. 8).

3. Estruturas

Como já mencionamos, os defensores do realismo estrutural não são explícitos quanto à noção de estrutura que desejam empregar. Tudo nos leva a crer, porém, que se tratam de estruturas *matemáticas*, ou que possam ser a elas reduzidas. Segundo da Costa e French, há três principais maneiras de se definir estrutura matemática, que são as seguintes: (1) usando uma teoria de conjuntos, por exemplo, ao estilo Bourbaki; (2) através da lógica de ordem superior (ou teorias de tipos); (3) através da teoria de categorias. Quanto à primeira, o conceito usual de espécies de estruturas em geral e de estrutura em particular é essencialmente aquele de Bourbaki (Bourbaki 1968, cap. 4). Essa noção de estrutura é, segundo os autores, aquela utilizada por

ANALYTICA
volume 14
número 1
2010

E. W. Beth e Patrick Suppes, por exemplo, em sua defesa da abordagem semântica. Nesta visão, em termos gerais, um modelo de uma teoria científica é uma estrutura que satisfaz certas sentenças de uma linguagem conveniente. Essas caracterizações podem ser consideradas como expressando os conceitos padrões de estrutura (matemática) e modelo (da Costa e French *op. cit.*, cap. 2). Na segunda opção, ao invés da teoria de conjuntos, usamos a lógica de ordem superior para definirmos estrutura. Essa é basicamente a abordagem adotada por Rudolf Carnap (por exemplo, em *The Logical Syntax of Language*), e pode ser mostrado que ela é essencialmente equivalente à definição de Bourbaki. A grande diferença, todavia, é que podemos interpretar os elementos básicos de uma estrutura como *predicados* e não como *conjuntos*. Desse modo, não só podemos definir estruturas *extensionais*, mas também *intensionais* (*ibid.*). No que diz respeito à terceira maneira de se definir estrutura, já tinha sido observado por Bourbaki que muitas propriedades das estruturas dependem não apenas de uma estrutura particular, mas de uma *coleção* de estruturas, compondo objetos matemáticos conhecidos como *categorias*. Charles Ehresmann, membro do grupo Bourbaki, generalizou essa situação e definiu espécies de estruturas como um *funtor* agindo sobre categorias apropriadas. Esse conceito categorial ou funtorial de espécies de estruturas pode ser visto como estendendo a definição conjuntista (*set-theoretical*) o que, talvez, com futuros desenvolvimentos, nos leve a preferir essa àquela (*ibid.*).

Se o que os defensores do realismo estrutural ontológico estão defendendo é que *tudo* são estruturas, talvez fosse mais adequado tomar essa noção como *primitiva*, como geralmente se faz em uma teoria de categorias, mas, feito isto, adequados axiomas deveriam então ser fornecidos. Mas se a estrutura for vista como uma entidade conjuntista, um grave problema surgirá para os realistas estruturais. Antes de tratarmos desse problema, vejamos brevemente como uma estrutura conjuntista pode ser caracterizada.

Intuitivamente falando, uma estrutura é um construto teórico, uma n-upla ordenada, onde o primeiro elemento é um conjunto, ou uma família de conjuntos não-vazios, geralmente referidos como o *domínio* (ou *universo*) da estrutura, e uma família de relações n-árias que agem sobre os elementos desse domínio. Em geral, para dar conta de teorias científicas interessantes, o domínio não pode ser um conjunto simplesmente, mas uma entidade "construída" a partir de conjuntos básicos, como mostrou Bourbaki (Bourbaki, *op. cit.*). Em suma, não bastam "estruturas de 1ª ordem". No entanto, por simplicidade, falaremos unicamente de estruturas de 1ª ordem, ou seja, em símbolos, algo como $S = \langle D, R_i \rangle_{i \in I}$. Segue que, em uma teoria de conjuntos

ANALYTICA
volume 14
número 1
2010

usual, digamos Zermelo-Fraenkel (ZF), para podermos definir relações entre conjuntos (de objetos), precisamos ter, antes de tudo, os próprios conjuntos. Desse modo, não é possível, pelo menos em ZF, ter relações *sem* os relacionados, ou *relata*. Como vimos acima, French e Ladyman "adotam" a abordagem conjuntista porque estão interessados, entre outras coisas, nos conceitos de "estrutura parcial" e "quase-verdade", que foram originalmente baseados nessa abordagem (ver da Costa e French *op. cit.*, cap. 1 e 2). Gostaríamos de enfatizar, todavia, que outras abordagens, como a categorial, poderiam também ser utilizadas para fundamentar o realismo estrutural.

Mas se de fato o conceito de estrutura for aquele definido em uma teoria de conjuntos usual – ZF, por exemplo –, então surge um grave problema para os defensores dessa teoria. A origem do problema é sucintamente a seguinte. Admitamos, como exemplo, uma relação binária r entre os conjuntos A e B, ou seja, $r \in P(A \times B)$, onde os elementos da relação são pares ordenados $\langle a, b\rangle$, com $a \in A$ e $b \in B$. Então, para obtermos r, precisamos construir a escala A, B, $A \times B$, $P(A \times B)$ e selecionar um adequado elemento que nos interesse (por exemplo, satisfazendo certos axiomas).[1] Portanto, não se pode, em ZF, ter r sem "antes" termos A e B e seus elementos. Em certo sentido, os objetos vêm "antes" das relações. Porém, se *tudo* o que existe são relações (estruturas), como desejam os defensores do realismo estrutural ontológico, então essas relações se dão entre o quê? Como vimos acima, em uma teoria de conjuntos, relações são definidas através de objetos (conjuntos); na matemática usual (em ZF), não existem relações "em si mesmas". Portanto, se a noção de estrutura for entendida em termos *conjuntistas*, então o realismo estrutural ontológico, pelo menos na versão defendida por French e Ladyman, evapora-se, pela impossibilidade de se ter relações sem os *relata*.

4. O problema das relações sem os *relata*

O problema acima teria sido primeiramente sugerido por Michael Redhead, em discussão privada, a French e Ladyman (French e Ladyman 2003). Esses, infelizmente, trataram-no de maneira um tanto vaga, relegando uma discussão mais adequada a trabalhos posteriores. Vejamos mais detalhadamente em que consiste a natureza do problema.

1 Esse "processo de construção de escalas (*échelons*)" é descrito no capítulo 4 de Bourbaki (Bourbaki *op. cit.*).

ANALYTICA
volume 14
número 1
2010

Aparentemente, French e Ladyman parecem ter duas posturas com respeito à eliminação dos objetos, em favorecimento da estrutura. A primeira é a que os objetos, em seu nível ontológico fundamental, devem ser entendidos estruturalmente, ou seja, algo como serem "estruturais desde o início". Ao contrário do que vimos acima, as relações viriam "antes" dos objetos (French e Ladyman *op. cit.*). A segunda visão é aquela que adota os objetos como tendo uma função *heurística*, podendo ser "dispensados" depois da obtenção da estrutura. Deixem-nos explicar melhor esses dois pontos.

Uma das principais motivações para o desenvolvimento do realismo estrutural ontológico está na questão da indistinguibilidade de partículas elementares (Ladyman 1998; French e Ladyman 2003, 2003a). Desde o surgimento da teoria quântica, notou-se que os tipos de estatísticas que governavam coleções de partículas elementares implicavam que essas entidades diferiam daquelas governadas pela estatística clássica.[2] Foi notado por vários físicos, como Erwin Schrödinger e Werner Heisenberg, entre outros, que o conceito de *identidade* não seria aplicável a essas partículas; nesse nível, o conceito de identidade careceria de sentido. A principal conseqüência filosófica desse fato seria a de que partículas elementares seriam *não-indivíduos*, no sentido mencionado acima, ou seja, de que o conceito de identidade não poderia ser aplicado a tais entidades. Essa postura, a de que partículas elementares seriam não-indivíduos, ficou conhecida na literatura como *Received View* (não confundir com a também chamada *Received View* associada ao positivismo lógico). Em sua ampla investigação sobre o assunto, French e Krause chegaram à conclusão de que a *Received View* não era a única posição filosófica possível (French e Krause 2006, cap. 4). O formalismo da mecânica quântica também poderia ser concebido tendo em consideração que as partículas elementares são *indivíduos*, embora de uma natureza bastante diferente da dos indivíduos "clássicos". Ou seja, o formalismo da mecânica quântica seria compatível com as duas visões, a de não-indivíduos e a de indivíduos. A conseqüência filosófica disso, segundo os autores, é bastante interessante: a nossa metafísica torna-se *subdeterminada* pela física que adotamos. O pacote metafísico, indivíduo/não-indivíduo, depende da física que adotamos, uma física que lida com indivíduos ou uma física que lida com não-indivíduos (*ibid.*).

2 Obviamente não nos aprofundaremos nessa questão neste artigo. A principal referência é French e Krause 2006.

ANALYTICA
volume 14
número 1
2010

Mas qual a relação disso tudo como o realismo estrutural? Bem, a tese da subdeterminação, segundo French e Ladyman, colocaria o realista científico tradicional em xeque: de fato, qual seria a *verdadeira* – na medida em que esse conceito faça algum sentido – metafísica associada“ao mundo”, uma metafísica de indivíduos ou uma metafísica de não-indivíduos? Segundo os autores, o realista (científico) tradicional não deu a devida importância a esse fato, o que acabou por fortalecer posições rivais, como a teoria anti-realista de van Fraaassen, o empirismo construtivo. De fato, a última seção do livro de van Fraassen *Quantum Mechanics: An Empiricist View*, onde ele oferece uma interpretação empirista da mecânica quântica, tem como título“adeus metafísica”, fazendo referência justamente à questão da subdeterminação e a falta de uma posição do realista para com ela (French e Ladyman 2003). Pois bem, para French e Ladyman, o realismo estrutural ontológico ofereceria uma proposta de solução ao problema: indivíduos ou não-indivíduos poderiam ser vistos como diferentes interpretações, modelos, de uma mesma estrutura. A questão agora seria então a de entender adequadamente essa noção de estrutura, e em que sentido ela poderia ser encarada como ontologicamente fundamental.

É neste ponto que retornamos à questão do início da seção: tem o mesmo sentido dizer que os objetos, em seu nível ontológico fundamental, devem ser entendidos estruturalmente – ou seja,“estruturais desde o início”–, e dizer que os objetos têm apenas uma função *heurística* no desenvolvimento de teorias, e que após a elaboração da estrutura, eles poderiam ser “descartados”? Se há uma diferença substantiva nessas duas posturas, a primeira delas, a que defende que os objetos devem ser vistos como“estruturais desde o início”, enfrentará grandes problemas do ponto de vista formal (matemático), isto é, do ponto de vista da elaboração dessas estruturas, caso elas sejam interpretadas conjuntisticamente. De fato, como podemos ter estruturas relacionais *sem* objetos figurando entre as relações? Se o conceito de estrutura adotado é aquele definido em uma teoria de conjuntos usual, como os defensores do realismo estrutural ontológico parecem desejar, e se a estrutura é tudo o que há, como os objetos podem ser entendidos como“estruturais desde o início”? O cerne da questão é sucintamente o seguinte: como é possível, formalmente (matematicamente), termos relações – logo, estruturas – sem as coisas que estão sendo relacionadas, os chamados *relata*?

Um dos primeiros passos para uma defesa séria do realismo estrutural seria dar uma definição adequada de estrutura. Ora, tal definição (dado os propósitos do realismo estrutural) deveria ser, pelo menos a princípio, de caráter matemático e, segundo os defensores da versão

ANALYTICA
volume 14
número 1
2010

ontológica dessa teoria, conseqüentemente conjuntista. Porém, em uma teoria de conjuntos usual, digamos ZF, para podermos definir relações entre conjuntos (de objetos), precisamos ter, antes de tudo, os próprios conjuntos! Os objetos devem vir "antes" das relações, e não o contrário. A nosso ver, a solução do que chamaremos aqui de "o problema das relações sem os *relata*" é uma condição *sine qua non* para o desenvolvimento dessa versão ontológica do realismo estrutural.

5. Quase-relações

Uma proposta de solução do problema foi apresentada por Décio Krause, e está diretamente relacionada com a questão da indistinguibilidade das partículas elementares, referida acima. O problema é que se essas entidades podem ser vistas como não-indivíduos, no sentido em que o conceito de identidade não é válido para elas, como associar um formalismo (matemático) cujas entidades possuem condições de identidade bem definidas, ou seja, são indivíduos?[3] A maneira pela qual os físicos usualmente tratam a questão da indistinguibilidade das partículas é atribuindo-lhes inicialmente rótulos, isto é, considerando-as indivíduos, e depois postulando condições de simetria para que esses rótulos sejam desconsiderados. Começa-se então considerando tais entidades como indivíduos e depois se postula condições de simetria para que essa individualidade seja desconsiderada, adequando-se com a falta de identidade das partículas. No entanto, a não-individualidade poderia ser obtida "desde o início" – como, aliás, propôs Heinz Post (Post 1963) –, o que demandaria uma matemática fundamentada em uma teoria de conjuntos diferente das usuais. A teoria de quase-conjuntos, proposta primeiramente por Krause em 1992, pode ser vista então como a concretização dessa idéia.[4] É claro que não adentraremos nessa teoria neste artigo, o que nos interessará aqui será o conceito de *quase-relação* definido na teoria de quase-conjuntos. Krause propôs que esse conceito poderia ser uma alternativa ao problema das relações sem os *relata*, já que ele permite que relações sejam construídas sem se levar em conta os (particulares) *relata* (Krause 2005). A idéia geral é sucintamente a seguinte.

3 Considerando-se que tal matemática seja fundamentada em uma teoria usual de conjuntos, como Zermelo-Fraenkel.

4 Referências adequadas podem ser encontradas em French e Krause *op. cit*.

ANALYTICA
volume 14
número 1
2010

A teoria de quase-conjuntos ***Q*** lida com dois tipos de *Urelemente*, os chamados *M*-átomos e os *m*-átomos.[5] Em termos intuitivos, podemos considerar os *M*-átomos como sendo "objetos clássicos", para os quais o conceito de identidade pode ser estabelecido, e a individualidade assegurada. Os *m*-átomos podem ser interpretados como os objetos elementares da mecânica quântica, ou seja, objetos que não possuem identidade, e que podem ser referidos como não-indivíduos. Os quase-conjuntos são coleções de objetos da teoria, que podem ser *Urelemente* (*M*-átomos ou *m*-átomos) ou outros quase-conjuntos. A parte da teoria ***Q*** que lida apenas com *m*-átomos é chamada "pura". Estaremos considerando os conceitos a seguir dentro dessa parte "pura" de ***Q***, a parte que envolve apenas *m*-átomos. No que diz respeito a esses, uma relação de indistinguibilidade fraca '$\equiv$', ao invés da identidade, é postulada. Essa relação de indistinguibilidade possui as propriedades de uma relação de equivalência, ou seja, ela é reflexiva, simétrica e transitiva. Refletindo as idéias de Schrödinger (e outros), o predicado de igualdade *não* pode ser aplicado aos *m*-átomos, uma expressão da forma $x = y$ não é uma fórmula de ***Q***, se x e y são *m*-átomos.

Assim, uma *quase-relação* sobre um quase-conjunto A é um quase-conjunto R cujos elementos são "pares" ordenados que pertencem a A. Esses "pares", como comenta Krause, devem ser entendidos de maneira adequada. Uma vez que a identidade não pode ser aplicada a *m*-átomos, um par ordenado $\langle z, w\rangle$, pode ser entendido como uma coleção de indistinguíveis de z (denotada $[z]$) e uma coleção de indistinguíveis de z ou de w (denotada $[z; w]$) que pertencem a A; podemos então representá-lo como $\langle z, w\rangle =_{def.} [[z], [z; w]]$ – o que lembra a definição usual de par ordenado em ZF. Portanto, como já mencionado, cada "par" pode conter mais de dois elementos – sendo assim, a palavra "par" pode ser entendida como "par de espécies (*kinds*)" (*ibid*.). Uma quase-relação binária R sobre A é um quase-conjunto que obedece ao seguinte predicado $\mathfrak{R}$: $\mathfrak{R}(R) =_{def.} \forall z(z \in R \rightarrow \exists u \exists v(u \in A \wedge v \in A \wedge z =_E \langle u, v\rangle))$, onde '$=_E$' é a relação de identidade extensional (cf. *ibid*.). A seguinte questão pode ser então levantada (para relações *n*-árias): dada uma certa quase-relação R sobre um quase-conjunto puro A, se temos $R(x_1, ..., x_n)$, isso faz com que tenhamos $R(x'_1, ..., x'_n)$ também, se $x_i \equiv x'_i$? Ou seja, as relações são "preservadas" quando os *relata* são "trocados" por seus indistinguíveis? Segundo Krause, a resposta dependerá do tipo de relação envolvida. Se R for a relação de pertinência, então a resposta será negativa,

5 A teoria ***Q*** tem como base ZFU (Zermelo-Fraenkel com *Urelemente*).

pois nada nos axiomas da teoria $\boldsymbol{Q}$ diz que se $x \in y$ e $x \equiv x'$ e $y \equiv y'$, então $x' \in y'$ – esse é um dos resultados mais básicos que tornam a relação de indistinguibilidade diferente da de identidade. Assim, a pertinência é a única relação primitiva de $\boldsymbol{Q}$ que não permite substitutividade por indistinguibilidade (*ibid.*). Por outro lado, se consideramos R como sendo qualquer relação *diferente* da pertinência – uma relação binária para simplificar –, e tendo em mente que R percorre um quase-conjunto contendo apenas m-átomos, a pergunta pode ser reformulada assim: se R é uma quase-relação binária (diferente da relação de pertinência), e se $R(x, y) \wedge x' \equiv x \wedge y' \equiv y$, isso confere que $R(x', y')$? Mais uma vez, a resposta não é direta.

Sendo x e y m-átomos e R definida sobre um quase-conjunto finito puro, temos que $R(x, y)$ significa $\langle x, y\rangle \in R$, ou seja, $[[x], [x, y]] \in R$. Sendo $[x]$ o quase-conjunto de todos os indistinguíveis de x (que pode, portanto, ter mais de um elemento), e $[x, y]$ o quase-conjunto dos indistinguíveis ou de x ou de y. Neste caso, x e y não são vistos como nomes de *objetos* do domínio, mas sim como nomes *generalizados*, digamos, significando algo como "alguns" indistinguíveis de x ou y respectivamente. Podemos dizer, assim, que uma relação binária em $\boldsymbol{Q}$ não é uma coleção "bem definida" (pela sua extensão) de pares ordenados dos elementos de algum quase-conjunto – isso mostraria que um quase-conjunto não é "determinado por seus elementos". Com $R(x, y)$ não estamos necessariamente dizendo *quais* específicos x e *quais* específicos y estão na relação, mas que *algum* indistinguível de x está na relação com *algum* indistinguível de y. O problema que surge, então, é aquele de se explicar em que sentido R está sendo definida sobre um certo A, pois se x' e y' são indistinguíveis respectivamente de x e y, então como podemos garantir que, sendo $R(x, y)$ o caso, o mesmo acontece com $R(x', y')$? Isto é, x' e y' podem não ser membros de A. Portanto, novamente, a resposta à questão acima aparentemente é negativa (*ibid.*).

Todavia, segundo Krause, existe um sentido em que a resposta será afirmativa, basta considerarmos as *vizinhanças* (*surroundings*) do quase-conjunto A. O conceito de vizinhanças de A é definido relativamente a um quase-conjunto D da seguinte maneira: $Sur_D A =_{def.} [y \in D : y \equiv x \wedge x \in A]$. Ou seja, uma vizinhança de A é um quase-conjunto D de elementos indistinguíveis dos elementos de A. Intuitivamente, $Sur_D(A)$ age como as vizinhanças das quais A pode "trocar" elementos. Supondo que $\check{R}$ é a extensão de R a $Sur_D(A)$, ou seja, $\check{R}$ é o quase-conjunto de todos os "pares" $\langle x, y\rangle$, com x e y em $Sur_D(A)$, tais que $\langle x, y\rangle \in \check{R}$ quando $\langle x, y\rangle \in A$, podemos provar em $\boldsymbol{Q}$ o seguinte teorema:

ANALYTICA
volume 14
número 1
2010

Teorema: Se $A \subseteq D$, x, $y \in A$ e $R(x, y)$, onde R é uma quase-relação sobre A, então existem x', $y' \in D$ tais que $x' \equiv x$ e $y' \equiv y$ de modo que $\check{R}$ (x′, y′).[6]

Intuitivamente, o teorema acima diz que, se $R(x, y)$ é estabelecida para x, $y \in A$, então se x' e y' são indistinguíveis de x e y respectivamente e pertencem a um quase-conjunto D que inclui A, então $\check{R}(x', y')$ é estabelecida para esses elementos. Como observa Krause, não faria sentido matemático dizer no caso geral que $\check{R}(x', y')$ é o caso, pois x' e y' podem não pertencer a A, sendo R um quase-conjunto definido sobre A. Assim, a extensão $\check{R}$ de R tem a função de R para os elementos das vizinhanças de A e coincidem com R dentro de A. Portanto, dizendo que $\check{R}(x', y')$ é estabelecida, estamos em certo sentido garantindo que a quase-relação R é preservada (através de $\check{R}$) quando os elementos relacionados são trocados pelos seus adequados (indistinguíveis), *não dependendo*, assim, dos (particulares) *relata* (entendidos como indivíduos) envolvidos (*ibid*.). Como conseqüência, podemos enunciar os seguintes corolários:

Corolário 1: Se $S = \langle D, \check{R}_i \rangle$ é uma estrutura sobre D e se $E \equiv D$, então $S' = \langle E, \check{R}_i \rangle$ é uma estrutura sobre E.

Corolário 2: Se uma fórmula α for verdadeira em S, então α também será verdadeira em S'.

Bem como a seguinte definição:

Definição: Dizemos que $S = \langle D, \check{R}_i \rangle$ e $S' = \langle E, \check{R}_i \rangle$ são da *mesma espécie* se $D \equiv E$. Na verdade, já que as quase-relações são definidas sobre quase-conjuntos indistinguíveis, elas também devem ser indistinguíveis.

Agora podemos finalmente voltar ao problema mencionado acima. Se estivermos trabalhando não em uma teoria de conjuntos, mas em uma teoria de quase-conjuntos, há uma maneira de termos, como vimos acima, relações *sem os particulares relata*. Isto é, os *relata* passam a figurar não como *indivíduos*, mas como *espécies* (*kinds*) ou *tipos* (*sorts*) de *não-indivíduos*, entendendo por não-indivíduos elementos aos quais não se aplica a relação de identidade, tal como visto anteriormente. Assim, embora (ainda) não possamos "eliminar" por completo os *relata*, podemos, no sentido explanado acima, "desconsiderá-los" como indivíduos particulares. O uso de uma teoria de quase-conjuntos para suportar o realismo estrutural ontológico parece seguir

6 A prova do teorema é dada no referido artigo.

de uma maneira natural, pois os seus defensores enfatizam que ele deve estar totalmente voltado para a física quântica. Portanto, se assumirmos que a teoria de quase-conjuntos fornece um suporte matemático"mais adequado"à física quântica, pelo menos do ponto de vista filosófico, seria natural que esta também o fornecesse ao realismo estrutural ontológico. Lembramos que a alternativa apresentada originalmente por Krause é, em certo sentido, *parcial*, permanecendo ainda como desafio uma proposta, se possível, de *total* "eliminação" dos *relata*. Outra possível alternativa seria fundamentar a teoria de conjuntos em uma lógica *sem* variáveis individuais. A base dessa proposta pode estar no cálculo de relações, e é sobre ele que teceremos algumas breves considerações a seguir.

6. O cálculo de relações

O cálculo de relações faz parte de um ramo da lógica conhecido como teoria das relações. Sua origem remonta a pelo menos Augustus De Morgan, quem chamou a atenção para a importância de uma teoria lógica das relações em seu trabalho de 1860. O desenvolvimento sistemático do cálculo de relações, todavia, se deve principalmente aos lógicos C. S. Peirce e E. Schröder, na segunda metade do século XIX. O primeiro tornou preciso todos os conceitos e estabeleceu as leis fundamentais da teoria das relações em uma série de artigos publicados entre 1870 e 1882, e pode ser considerado, segundo Alfred Tarski, o fundador dessa teoria como uma disciplina dedutiva. Peirce mostrou que grande parte da teoria das relações pode ser representada como um cálculo, formalmente bastante semelhante ao cálculo de classes desenvolvido por G. Boole e W. S. Jevons (Tarski 1941; Pratt 1992). Continuando o trabalho de Peirce, Schröder dedicou o terceiro volume – um tomo de 800 páginas – de sua série sobre lógica ao estudo do cálculo de relações. Segundo Tarski, embora A. N. Whitehead e B. Russell tenham incluído a teoria das relações na lógica de seus *Principia Mathematica*, tornando essa teoria uma parte central de seu sistema lógico, e introduzindo muitos conceitos novos e importantes conectados com o conceito de relação, esse trabalho contribuiu muito pouco para o desenvolvimento intrínseco da teoria das relações como uma disciplina dedutiva independente, pois muitos de seus conceitos não pertenciam à teoria das relações propriamente, mas sim estabeleciam relações entre essa teoria e outras partes da lógica (Tarski *op. cit.*). Portanto, podemos dizer que após os trabalhos de Peirce e Schröder, o cálculo de relações permaneceu praticamente esquecido por cerca de quarenta e cinco anos, sendo retomado apenas em 1941 pelo trabalho de Tarski.

ANALYTICA
volume 14
número 1
2010

Essa teoria (e suas extensões) é bem conhecida entre a maioria dos lógicos, mas pouco conhecida entre os filósofos em geral. Assim, nesta última seção, faremos uma breve apresentação de suas principais características, tendo como objetivo, ao final do artigo, indicar brevemente como uma extensão desse cálculo pode servir de fundamento aos principais sistemas de teoria de conjuntos. Uma sugestão (e, mais uma vez, apenas isso) de como estruturas podem ser encaradas em um sistema conjuntista que prescinde variáveis individuais será mencionada.

Em seu artigo célebre, Tarski (1941) se restringe ao cálculo das relações *binárias*, reconhecendo que esse faz parte de uma teoria mais ampla das relações. Tarski também se compromete a considerar apenas operações finitas sobre relações. Deste modo, ele distingue dois métodos diferentes de se fundamentar o cálculo de relações de uma maneira dedutivamente rigorosa. O primeiro método consiste em construir o cálculo de relações como uma parte de uma teoria lógica mais abrangente, e que corresponde aproximadamente, segundo Tarski, ao cálculo quantificacional, naquela forma proposta, por exemplo, por D. Hilbert e W. Ackermann. Nesse primeiro método, há dois tipos de variáveis: variáveis individuais, representadas por letras minúsculas 'x', 'y', 'z', ..., e variáveis relacionais, representadas por letras maiúsculas 'R', 'S', 'T', 'U', ... Temos também dois tipos de constantes: os conectivos do cálculo sentencial, a negação '$\neg$', a conjunção '$\wedge$', a disjunção '$\vee$', a implicação '$\rightarrow$' e a equivalência '$\leftrightarrow$'; e os quantificadores: universal '$\forall$' e existencial '$\exists$'.

A partir dessas variáveis e constantes, podemos formar várias expressões, e dentre essas, seguindo as regras usuais do cálculo quantificacional, distinguir aquelas que são bem formadas, chamadas de sentenças ou funções sentenciais. Expressões da forma 'xRy' (leia-se 'x tem a relação R com y') são então chamadas de sentenças *elementares*. Sentenças *compostas* são obtidas, como usual, adicionando-se na frente de uma sentença o símbolo de negação, quantificadores seguidos de variáveis individuais, por exemplo, $\forall x(xRx)$, ou ainda combinando duas sentenças elementares por meio de um dos conectivos binários acima: '$\wedge$', '$\vee$', '$\rightarrow$' e '$\leftrightarrow$'. Dentre todas as sentenças, escolheremos então uma certa classe delas, e as chamaremos de *axiomas*; escolheremos ainda duas regras de inferência, a *regra de substituição* e a *regra de destacamento* (ou *Modus Ponens*), além de regras com respeito ao uso de quantificadores. Todas as sentenças obtidas dos axiomas por meio das regras de inferências são chamadas de *teoremas* (todos esses conceitos são bem conhecidos, e podem ser encontrados nos livros usuais de introdução à lógica).

ANALYTICA
volume 14
número 1
2010

Seguindo Tarski, podemos agora ampliar a teoria acima adicionando certas constantes específicas do cálculo de relações. As quatro primeiras são *constantes de relações*: a relação universal '1', a relação nula '0', a relação de identidade (entre indivíduos) '*I*' e a relação de diferença (entre indivíduos) '*D*'. São adicionados ainda seis símbolos para operações: dois símbolos para operações *unárias* (sobre relações), o símbolo de *complemento* '‾', e o símbolo de *inversa*, que aqui denotaremos por '-1'; quatro símbolos para operações *binárias*, o símbolo de *adição* '+', *multiplicação* '**.**', *adição relativa*, que denotaremos aqui por '⊕' e o de *multiplicação relativa* ou *produto relativo* '⊗'. Por fim, temos o símbolo de identidade entre relações '='. Os símbolos '1', '0', '**+**', '**.**', e os conceitos denotados por esses símbolos, serão chamados de constantes e conceitos *absolutos* (ou booleanos); os símbolos '*I*', '*D*', '-1', '⊕', '⊗', e os conceitos correspondentes, serão chamados de constantes e conceitos *relativos* (ou peirceanos) (*ibid*.).[7]

A partir de variáveis relacionais, constantes relacionais e símbolos de operações, construímos um novo tipo de expressões, chamadas *relações designativas*. Relações designativas *elementares* são variáveis e constantes relacionais. Relações designativas *compostas* são formadas adicionando-se símbolos para operações unárias às relações designativas elementares ou combinando essas por meio de símbolos para operações binárias, por exemplo, 'R^{-1}' (leia-se 'a inversa de *R*') ou '*R* ⊗ *S*' (leia-se 'o produto relativo de *R* e *S*'). A noção de sentença é estendida, permitindo que tenhamos também como sentenças elementares expressões da forma '*xRy*' e '*R* = *S*', onde '*x*' e 'y' são quaisquer variáveis individuais e '*R*' e '*S*' são quaisquer relações designativas. Sentenças compostas são obtidas através de sentenças elementares da mesma maneira da apresentada acima. Além dos axiomas do cálculo sentencial, são adicionados mais doze, que explicarão os significados das novas constantes, e que podem, na sua maioria, ser vistos como definições no cálculo sentencial se forem providas regras de definição apropriadas (*ibid*.).

As regras de inferências continuam sendo as mesmas, apenas que a regra de substituição permite agora a substituição de variáveis relacionais não apenas por outras variáveis relacionais, mas também por relações designativas. Tarski denomina a teoria acima de *teoria elementar das relações binárias* (*ibid*.). Agora, se nos restringirmos àquelas sentenças e teoremas que *não contêm* variáveis individuais, obtemos um fragmento da teoria das relações elementares, o *cálculo de relações*. Aqui o leitor pode identificar o nosso interesse pelo cálculo de relações. Face ao

7 A simbologia que estaremos empregando aqui difere ligeiramente daquela apresentada por Tarski.

ANALYTICA
volume 14
número 1
2010

problema apresentado acima, qual seja, o problema das relações sem os *relata*, podemos sugerir o cálculo de relações como uma primeira aproximação da idéia de termos relações sem os *relata* – pelo menos se eles forem vistos, do ponto de vista formal, como variáveis individuais.

Mencionamos anteriormente que Tarski apresenta dois métodos de se fundamentar o cálculo de relações, sendo o primeiro o apresentado em linhas precedentes. Mas se o que nos interessa é apenas o cálculo de relações, e não uma teoria mais ampla, então podemos apresentar o segundo método como provendo certas vantagens ao primeiro, por exemplo, segundo Tarski, do ponto de vista da simplicidade e elegância (*ibid*.). Podemos, deste modo, obter o cálculo de relações de um modo mais direto, sem fazer uso de conceitos e enunciados fora do cálculo, isto é, prescindindo de variáveis individuais. Neste segundo método, serão abolidas variáveis individuais e quantificadores. Todavia, devido ao fato de não haverem variáveis individuais e quantificadores, certas modificações serão necessárias. Sentenças elementares passam a ser apenas expressões da forma '$R = S$', onde 'R' e 'S' são relações designativas, sentenças compostas são formadas através dos conectivos binários figurando entre as relações designativas.

Dentre as sentenças desse segundo método, escolheremos aquelas para formarem os axiomas da teoria (não os apresentaremos aqui, ver *ibid*.). Segundo Tarski, eles podem ser divididos em três grupos. O primeiro grupo caracteriza o significado dos conectivos sentenciais. Para formulá-los, podemos tomar qualquer sistema de axiomas para o cálculo quantificacional que contenha como termos primitivos todos os conectivos sentenciais apresentados acima. O segundo grupo caracteriza os significados das constantes absolutas. Eles podem ser obtidos tomando-se os axiomas da álgebra booleana e substituindo as variáveis para classes por variáveis relacionais. Por fim, os axiomas do terceiro grupo são específicos do cálculo de relações; eles expressam as propriedades fundamentais dos conceitos relativos. Já que esses axiomas são teoremas do primeiro método, sua veracidade é indubitável (*ibid*.). Usando-se as mesmas regras de inferência do primeiro método, as regras de substituição e destacamento, Tarski apresenta uma série de teoremas[8], dentre os quais o último tem grande relevância: $\neg(R = 1) \leftrightarrow (1 \otimes R^{-}) \otimes 1 = 1$.

8 A lista completa encontra-se no referido artigo de Tarski, onde as provas são fornecidas.

ANALYTICA
volume 14
número 1
2010

Tarski observa então que o último teorema tem grande importância no cálculo de relações, já que ele nos permite provar o seguinte metateorema: *toda sentença do cálculo de relações pode ser transformada em uma sentença equivalente da forma 'R = S', e mesmo da forma 'T = 1'*. A validade deste metateorema segue da bem conhecida possibilidade de reduzirmos os conectivos do cálculo sentencial à negação e a conjunção (*ibid*.). Segundo Tarski, o metateorema sugere ainda uma outra maneira de construirmos o cálculo de relações, pois ele mostra que podemos nos limitar, na construção do cálculo, às sentenças que têm a forma de equações, ou a forma '$T = 1$', permitindo-nos *dispensar* os conceitos e teoremas do cálculo quantificacional. Se transformarmos todos os axiomas em equações, como acima, e oferecermos regras para derivar outras equações partindo daquelas, não teremos mais nenhum vínculo com o cálculo quantificacional. De fato, em certo sentido, *tudo* se torna relação. Em seu artigo, Tarski relega o desenvolvimento dessa nova versão do cálculo para trabalhos futuros, e observa que ela não apresenta grandes dificuldades.

Deveras, Tarski e sua "escola" dedicaram vários trabalhos ao estudo do cálculo de relações nos anos que se seguiram, seus resultados culminaram em uma obra dele e Steven Givant chamada *A Formalization of Set Theory without Variables*, publicada em 1987. Nessa obra, Tarski e Givant mostram que uma linguagem sem variáveis individuais pode servir como fundamento para a maioria dos sistemas de teorias de conjuntos. Em poucas palavras, a idéia geral é a de que vários sistemas formais – não apenas de teoria de conjuntos, na verdade – podem ser vistos como Q-sistemas, ou sistemas quase-projecionais (Tarski e Givant 1987, pp. 95-96). A noção de quase-projeção dada por Tarski e Givant é a seguinte (a menos da simbologia): seja Σ um conjunto de sentenças de uma linguagem sem variáveis individuais; Σ consiste de todas as sentenças Q_{RS} correlacionadas com pares ordenados de relações arbitrárias R, S pela fórmula: $Q_{RS} = ((R^{-1} \otimes R + S^{-1} \otimes S)^{-} + I) \mathbin{.} (R^{-1} \otimes S) = 1)$. Esta fórmula é equivalente, segundo os autores, à seguinte sentença do cálculo quantificacional: $Q_{RS} \approx \forall x \forall y \forall z(((xRy \wedge xRz) \vee (xSy \wedge xSz)) \rightarrow yIz) \wedge \forall x \forall y \exists z(zRx \wedge zSy)$, onde '$\approx$' é o símbolo de equivalência. As relações binárias F e G (entre elementos de um conjunto D), que são denotadas respectivamente por R e S, em uma dada realização $\langle D, U\rangle$ da linguagem são funções tais que, para quaisquer x, $y \in D$, existe um $z \in D$ de modo que $F(z) = x$ e $G(z) = y$. Duas relações F e G que cumprem essas propriedades são chamadas de *quase-projeções* (sobre um conjunto D). Segue que $\langle D, U\rangle$ é um modelo de Q_{RS} se, e somente se, as duas relações denotadas em $\langle D, U\rangle$ por R e S são quase-projeções sobre D

ANALYTICA
volume 14
número 1
2010

(*ibid.*). Desse modo, informalmente, um sistema formal é um Q-sistema se, e somente, existem relações R e S tais que, do conjunto de axiomas desse sistema, podemos deduzir Q_{RS}.

Segundo Tarski e Givant, um sistema de teoria de conjuntos – ZF, por exemplo – que contenha o *axioma do par* é um Q-sistema. Chamemos de P a sentença que representa esse axioma: $P = \forall x \forall y \exists z \forall u(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$. Os autores enunciam então o seguinte resultado: existem relações R e S tais que $P \approx Q_{RS} \approx (R^{-1} \otimes S = 1)$. As relações R e S podem ser obtidas por:

(a) $T = E^{-1} \otimes (E\text{-}1 \,.\, ((E^{-1})^{-} \oplus I)), \quad U = E^{-1} \otimes E^{-1}$ e

(b) $R = T \,.\, (T^{-} \oplus I), \quad S = U \,.\, (U^{-} + R \oplus I)$.

Então, de acordo com os autores, todos os sistemas de teoria de conjuntos que contêm uma forma do axioma do par são Q-sistemas[9], e podem ser formalizados em uma linguagem sem variáveis individuais, quantificadores ou conectivos sentenciais (*op. cit.*, pp. 96-131).

Para finalizar, voltemos a nossa principal questão: é possível, do ponto de vista formal, termos relações sem os *relata*, como desejam os defensores do realismo estrutural ontológico? Pensamos que há uma resposta positiva a essa questão. Neste artigo, apresentamos duas possíveis maneiras de se ter relações sem os *relata*. A primeira, através da noção de quase-relação na teoria de quase-conjuntos; por meio dessa noção, desconsideramos os particulares *relata* envolvidos nas quase-relações. A segunda proposta veio através do cálculo de relações; vimos que essa teoria propõe uma completa eliminação de variáveis individuais, e que uma extensão dela pode servir como base formal para os principais sistemas de teoria de conjuntos. Mas e quanto à noção de *estrutura*? Pensamos que, para os propósitos do realista estrutural ontológico – pelo menos para aquele que defende uma noção *conjuntista* de estrutura –, essa *aparentemente* pode continuar sendo entendida (intuitivamente, pelo menos) de modo usual, ou seja, como uma n-upla ordenada. Todavia, o domínio da estrutura será agora composto de um conjunto Δ de relações, por exemplo, variáveis 'R', 'S', 'T', ..., e de uma família Γ de relações, por exemplo, '$\otimes$', '$^{-}$', '$+$', '-1', ..., agindo sobre essas relações, o que em símbolos pode ser representado por $\Im = \langle \Delta, \Gamma_j \rangle_{j \in J}$.[10] Desse modo, parece que uma estrutura $\Im$ passa a ser um subconjunto do

9 Na verdade, qualquer sistema formalizado no cálculo quantificacional, onde é possível deduzir P, é um Q-sistema (*ibid.*).

10 As operações '$\otimes$', '$^{-}$', '$+$', '-1' são relações de *segunda* ordem (Tarski e Givant *op. cit.*, p. 23).

ANALYTICA
volume 14
número 1
2010

conjunto Π de todas as relações de uma linguagem sem variáveis individuais, quantificadores e conectivos sentenciais. Uma noção de estrutura assim entendida, aparentemente serviria aos propósitos (formais) do realista estrutural ontológico, pois já não mais o conduziria ao problema das relações sem os *relata*. O próximo passo seria investigar se é possível demonstrar que uma noção *rigorosa* de estrutura, semelhante à apresentada acima, é equivalente à definição usual de estrutura definida em uma teoria de conjuntos como ZF. Essa investigação, todavia, está além do escopo deste artigo, e a relegaremos a outro trabalho.

RESUMO

Neste artigo, após fazermos uma breve explanação do realismo estrutural ontológico, apresentaremos o problema das relações sem os relata *como uma forte objeção a essa teoria. Serão então discutidas duas possíveis alternativas ao problema. A primeira desconsidera os* particulares relata *(individuais) envolvidos nas relações, constituindo-se em uma solução* parcial *do problema; a segunda tem por base o cálculo de relações, que propõe uma completa eliminação de variáveis individuais.*

Palavras-chave: Realismo Estrutural. Abordagem Semântica. Estruturas Matemáticas. Quase-relações. Cálculo de Relações.

ABSTRACT

In this paper we first present a brief explanation of the ontic structural realism, after which we introduce the problem of relations without relata as a strong objection to this theory. Two possible solutions to the problem are then discussed. The first one rejects the particulars relata (individuals) involved in these relations and as such is only a partial solution to the problem; the second one is based on the relational calculus and it proposes the complete elimination of individual variables.

Keywords: Structural Realism. Model-theoretical Approach. Mathematical Structures. Quasi-relations. Calculus of Relations.

Referências bibliográficas

BOURBAKI, N. *The Theory of Sets*. London-Ontario: Hermann, Addison Wesley, 1968.

BUENO, O. *O empirismo construtivo: uma reformulação e defesa.* Campinas: col. CLE, 1999.

da COSTA, N. C. A. and FRENCH, S. *Science and Partial Truth: a unitary approach to models and scientific reasoning.* Oxford: Oxford Un. Press, 2003.

DEMOPOULOS, W. and FRIEDMAN, M. 'Critical Notice: Bertrand Russell's *The Analysis of Matter*: Its Historical Context and Contemporary Interest'. *Philosophy of Science*, 52: 621-639, 1985.

FRENCH, S. and LADYMAN, J. 'Remodelling Structural Realism: Quantum Mechanics and the Metaphysics of Structure'. *Synthese*, 136: 31-56, 2003.

______. 'The dissolution of objects: between platonism and phenomenalism'. *Synthese*, 136: 73-77, 2003a.

FRENCH, S. and KRAUSE, D. *Identity in Physics: a Historical, Philosophical and Formal Analysis*. Oxford: Oxford Univ. Press, 2006.

KRAUSE, D. 'On a quasi-set theory'. *Notre Dame J. of Formal Logic*, 33 (3): 402-411, 1992.

______. 'Structures and Structural Realism'. *Journal of the Interested Group in Pure and Applied Logic*, 13(1): 113-126, 2005.

LADYMAN, J. 'What is Structural Realism?'. *Studies in History and Philosophy of Science*, S 98, 29A(3): 409-424, 1998.

NEWMAN, M.H.A. 'Mr. Russell's "Causal Theory of Perception"'. *Mind*, 37: 137-148, 1928.

POST, H. 'Individuality and Physics'. In The Listener 70, 534, 1963. Reprinted in Vedanta for East and West 32 (1973) 14.

PRATT, V. R. 'Origins of the calculus of binary relations'. In *Proc. 7th Annual IEEE Symp. on Logic in Cumputer Sciencie*: 248-254, 1992.

PSILLOS, S. 'Is Structural Realism the Best of Both Worlds?'. *Dialectica*, 49: 15-46, 1995.

______.'Is Structural Realism Possible?'. *Philosophy of Science*. Suppl. vol., 68: S13-S24, 2001.

RUSSELL, B. *A Análise da Matéria.* Rio de Janeiro: Zahar, (1978 [1927]).

______. *The Autobiography of Bertrand Russell*.Vol. 2, London: George Allen & Unwin, 1968.

TARSKI, A.'On the calculus of Binary relations'. *The Journal of Symbolic Logic*, 6: 73-89, 1941.

van FRAASSEN, B.'Structure: Its Shadow and Substance'.*The British Journal for the Philosophy of Science*, 57: 275-307, 2006.

VOTSIS, I. The epistemological status of scientific theories: an investigation of the structural realist account. PhD Thesis, 2004.

WORRALL J.'Structural Realism: The Best of Both Worlds?' *Dialectica*, 43: 99-124, 1989.

Recebido em 07/2009

Aprovado em 02/2010