O Logicismo de Frege e Russell e a Rejeição Tractariana de Classes: uma tentativa de elucidação de 6.031

Rodrigo Sabadin Ferreira
UFRGS

Introdução

"I believe I have discovered that classes are entirely superfluous"[1]
Russell em sua correspondência com Frege, 23 de Maio de 1903.

Wittgenstein afirma no *Tractatus* que "[...] a teoria das classes é inteiramente supérflua na Matemática" e que "[...] isso está ligado ao fato de que a generalidade de que precisamos em matemática não é a *casual*" ou "*acidental*".[2] Essas observações ocorrem no contexto da elucidação da forma geral *Tractariana* da proposição[3] que, por sua vez, fornece o contexto para os aforismos centrais que tratam da Filosofia da Lógica[4] e da Matemática[5] do *Tractatus*. O aforismo ocupa, portanto, uma posição importante na obra. O conteúdo exato de 6.031, no entanto, raramente é explicado em detalhes e, como ocorre normalmente com as afirmações do *Tractatus*, certamente há mais de uma maneira ou perspectiva de elucidar o conteúdo do aforismo em questão.

A posição do aforismo no sistema de numeração do *Tractatus* sugere, como alguns comentadores[6] da Filosofia da Matemática do *Tractatus* apontam, que 6.031 apresenta uma conclusão geral da discussão sobre a forma geral de uma série numérica apresentada nos aforismos 6.02-6.03. E isso é – sem qualquer sombra dúvida – correto: os aforismos 6.02-6.03 apresentam e desenvolvem a ideia central da Filosofia da Matemática do *Tractatus* segundo a qual "o número é o expoente de uma operação"[7] e ali encontramos o argumento que procura mostrar – ainda que de modo esquemático – como é possível construir uma teoria dos números naturais em bases puramente lógicas sem assumir, como nota João Vergílio Cuter, uma hierarquia de tipos ou teoria dos conjuntos.[8]

1 FREGE, 1980, p.158.
2 TLP 6.031.
3 TLP 6.
4 TLP 6.1-6.13.
5 TLP 6.2-6.241.
6 Ver, por exemplo, MARION, 1998, pp.26-7.
7 TLP 6.021.
8 Cf. CUTER, 2005, p.65.

Ainda assim, a seguinte pergunta é cabível: por que tal fundamentação da teoria dos números naturais deve ser buscada ou se faz necessária segundo o *Tractatus*? Ou seja, o que exatamente Wittgenstein pensava estar fundamentalmente equivocado nas tentativas de seus predecessores – Frege e Russell – de fundamentar a Aritmética em bases puramente lógicas?

Uma possibilidade de elucidar o conteúdo de 6.031 e responder essa pergunta seria em termos de compromissos ontológicos, apontando que, para Wittgenstein, a ideia de que a Matemática é uma ciência comprometida com uma ontologia específica de conjuntos deve ser rejeitada, dado que, de acordo com o *Tractatus*, as leis da Lógica e, portanto, da Matemática não têm conteúdo e não tratam de um domínio específico de entidades. Isso, apesar de correto em linhas gerais, não nos leva longe o suficiente, pois considerações similares poderiam ser feitas sobre o Logicismo Russelliano tal como apresentado em *Principia Mathematica*—ao menos no que diz respeito ao compromisso com conjuntos, classes ou extensões de funções proposicionais concebidas enquanto objetos, pois, como é bem sabido, *Principia Mathematica* advoca uma 'No-Class Theory' que elimina todas as ocorrências de expressões de classes e relações-em-extensão como $\hat{x}Fx$ e $\hat{x}\hat{y}\psi(x, y)$ da sua linguagem objeto por meio de definições contextuais que empregam variáveis de ordem superior.[9]

Minha proposta aqui é tentar elucidar as afirmações feitas no aforismo 6.031 contrastando as ideias de Wittgenstein com o que penso ser uma forma da tese logicista que é, em certo sentido, compartilhada por Frege e Russell. Seguindo Gregory Landini,[10] considero que a tese que caracteriza o que podemos considerar o Logicismo 'compartilhado' de Frege e Russell é a ideia de que a Matemática – a Aritmética dos números naturais em particular – pode ser reconstruída adequadamente no interior de uma teoria lógica cuja estrutura formal ou sintaxe é, em linhas gerais, aquela da teoria de tipos simples, na qual enunciados de atribuições numéricas são analisados como afirmações sobre conceitos (para Frege) ou atributos (Russell) nos quais expressões numéricas não são tratados como termos singulares, mas como propriedades ou conceitos de ordem superior exatamente análogos ao que chamamos hoje de quantificadores numericamente definidos. Minha sugestão é que essa ideia está entre os principais alvos de Wittgenstein no aforismo 6.031 e que o aforismo pode ser lido como uma conclusão mais ampla acerca do fracasso do projeto logicista concebido nos termos de Frege e Russell, no interior do qual o apelo à teoria das classes é apenas um sintoma do que, da perspectiva do *Tractatus*, são problemas mais profundos. No entanto, também também irei recusar, de maneira breve, uma possível interpretação exagerada do aforismo 6.031, que toma esse aforismo como uma abolição completa da noção de 'classe' ou 'conjunto' do âmbito da Lógica.

Dessa forma, a discussão será estruturada da seguinte forma. Na primeira seção procuro apresentar o que penso ser o logicismo compartilhado por Frege e Russell como a tentativa de caracterizar números naturais como conceitos de 'ordem superior' (i.e., conceitos que se aplicam a conceitos) análogos a quantificadores numericamente definidos no interior de uma hierarquia de funções e conceitos (ou, no caso de Russell, funções proposicionais) cuja estrutura é aquela da teoria dos tipos simples. Nessa primeira seção, também chamo atenção para dois aspectos cruciais dessa forma de logicismo que decorre dessa caracterização dos números naturais mencionada acima: a necessidade de axiomas de compreensão para as variáveis de ordem superior (como o Axioma da Redutibilidade de *Principia*) e de axiomas que garantem que a totalidade

9 Ver WHITEHEAD & RUSSELL, 1925, seções *20 e *21. De maneira geral, *Principia* evita toda sorte de compromissos ontológicos com o que, na terminologia Russelliana, podemos conceber como *particulares abstratos*: objetos particulares (ou seja, que não são universais, i.e., propriedades ou relações) e que não são concretos, ou seja, parte do mundo físico ou empírico. Para detalhes, veja-se, por exemplo, LANDINI, 2011a e FERREIRA, 2022,, capítulo 5.

10 Cf. LANDINI, 2011a.

dos números naturais é infinita (como o Axioma da Infinitude de *Principia*). Na segunda seção, que consiste no núcleo do presente texto, procuro discutir em algum detalhe as críticas do *Tractatus* a essa forma de logicismo a fim de mostrar como o aforismo 6.031 pode, justamente, ser lido e elucidado à luz dessas críticas ao logicismo de Frege e Russell. Nessa segunda seção chamo atenção, em especial, para os aforismos 4.127-4.128 em que Wittgenstein apresenta sua crítica à caracterização dos números naturais em termos das assim chamadas 'propriedades hereditárias' com respeito a uma série gerada por uma relação *R* (que demanda a introdução de axiomas de compreensão como o Axioma da Redutibilidade de *Principia*) e onde Wittgenstein também oferece o diagnóstico sobre o problema da 'existência' dos números naturais no interior da hierarquia dos tipos como uma falha crucial do logicismo de Frege e Russell. Uma vez que esses aspectos do que estamos chamando de logicismo compartilhado por Frege e Russell que Wittgenstein critica aparecem de maneira explícita e saliente no desenvolvimento logicista da Aritmética apresentado por Whitehead e Russell, o foco dessa discussão detalhada é voltado para *Principia Mathematica*, que é, de fato, o alvo principal das críticas de Wittgenstein. Com essa discussão detalhada, procuro tornar plausível minha conclusão de que o aforismo 6.031 pode ser lido como um diagnóstico geral de quão mal orientado o projeto logicista de Frege e Russell. era da perspectiva do *Tractatus*. Por fim, na terceira e última seção, considero o papel que a noção de uma classe de proposições cumpre no *Tractatus*.

1. O Logicismo 'compartilhado' de Frege e Russell

Para discutirmos o que penso ser o Logicismo compartilhado por Frege e Russell (e Whitehead), precisamos antes discutir um aspecto central compartilhado das linguagens formais que esses autores articulam, respectivamente, em suas *magna opera Grundgesetze der Arithmetik* e *Principia Mathematica*, a saber, aquilo que Michael Dummett chama de 'Hierarquia dos Níveis'.[11] No caso de Frege, a gramática da hierarquia dos níveis se manifesta em termos de uma hierarquia de expressões representando funções. No nível mais baixo da hierarquia temos variáveis individuais e nomes próprios que estão por aquilo que Frege chama de *objetos* (e Russell chama *indivíduos*), i.e., expressões que *não* estão por ou representam funções. A hierarquia de expressões funcionais de Frege começa com expressões "*f*(...)" cujos argumentos são variáveis individuais ou nomes de objetos; o segundo nível da hierarquia de funções consiste em expressões funcionais "*M*(...)" cujos argumentos podem ser funções do primeiro nível,[12] já o terceiro nível consiste em funções cujos argumentos consistem em funções do segundo nível, e assim por diante. No caso de Russell, a gramática da hierarquia de níveis se manifesta em termos de uma hierarquia de tipos das assim chamadas 'funções proposicionais' que, de maneira similar à hierarquia de funções de Frege, se estrutura em termos dos *tipos* de argumentos que uma função proposicional admite: no 'tipo' mais baixo tempos variáveis individuais, depois funções $F\hat{x}$ cujos argumentos são variáveis individuais, funções $M(F\hat{x})$ cujos argumentos são funções cujos argumentos são variáveis individuais, e assim por diante, *ad infinitum*.

11 Ver DUMMETT, 1981, capítulo 3. Uma excelente discussão que contrasta a hierarquia dos níveis de expressões com a lógica do *Tractatus* é feita em CUTER, 2013, discussão na qual iremos nos apoiar fortemente na próxima seção que trata sobre o *Tractatus*.

12 Um exemplo típico sendo o quantificador universal "$(x).(...x...)$". É importante notar que, para Frege, funções de primeira ordem não são argumentos de funções de ordem superior estritamente no mesmo sentido em que um objeto é um argumento de uma função de primeiro nível. Como Frege observa, um objeto cai *sob um conceito*, enquanto uma função cai *dentro* de outra (cf. FREGE, 1892, p.201).

Apesar das importantes diferenças entre os sistemas e posições de Frege e Russell acerca da natureza das suas respectivas hierarquias de funções[13] (no caso de Russell, especificamente funções proposicionais), há um aspecto geral crucial que é comum a ambos: com respeito às possibilidades de substituição e aplicação das regras de inferência (generalização e instanciação) e, de modo geral, para os propósitos de reconstrução dos resultados matemáticos no interior de seus sistemas, a estrutura dos sistemas formulados por ambos é análoga àquela do que hoje chamamos a 'teoria dos tipos simples', na qual as variáveis de predicado são concebidas de maneira puramente extensional.[14] Essencialmente, o núcleo comum dessa estrutura pode ser fácil e elegantemente capturado através de uma definição recursiva de índices de 'tipos simples' para as variáveis de predicados. Podemos fazer isso, por exemplo, com a seguinte definição:

1. "*i*" é o índice de tipo simples de variáveis individuais.
2. Se $t_1,\ldots, t_n$ são índices de tipo simples, então $(t_1,\ldots, t_n)$ é um índice de tipo simples.
3. Nada mais é um índice de tipo simples.

Dada essa definição, a estrutura de tipos é incorporada na teoria exigindo que uma fórmula atômica qualquer só seja considerada bem formada se for uma instância de um esquema como o seguinte, onde $t_1,\ldots, t_n$ são índices de tipo simples e $\alpha_1,\ldots, \alpha_n$ e λ são variáveis da linguagem que estamos pressupondo:

$$\lambda^{(t1,\ldots,\ tn)}(\alpha_1^{t_1},\ldots,\ \alpha_n^{t_n})$$

O que se segue dessa exigência, como é bem sabido, é que na linguagem resultante uma variável ou constante de predicado λ qualquer só pode tomar como argumentos um termo ou uma *n*-upla de termos $<\alpha_1^{t_1},\ldots, \alpha_n^{t_n}>$ se o seu tipo simples for exatamente aquele requerido pelos termos em questão. Essa estrutura gramatical, em linhas gerais, é o núcleo central compartilhado pelos sistemas de Frege e Russell, apesar das salientes diferenças existentes nas posições e sistemas formais elaborados por esses dois autores.

Bom, ocorre que a adoção dessa gramática estruturada em tipos simples tem como consequência dois aspectos cruciais para o que podemos pensar como uma forma da tese logicista compartilhada por Frege e Russell.

A primeira delas é bastante direta: a necessidade de assumir (explícita ou implicitamente) o que hoje chamamos 'Princípios de Compreensão' para variáveis 'funcionais' ou de predicados. Princípios desse tipo aparecem, por exemplo, em sistemas de lógica de segunda ordem 'standard' na forma de esquemas de axioma como o seguinte:

$(\exists F)(x_1,\ldots x_n)(F(x_1,\ldots,x_n) \equiv A)$, onde A é uma fórmula que não contém ocorrências livres da variável F.

No caso do sistema maduro de Frege apresentado nas *Leis Básicas da Aritmética*, esses axiomas são implicitamente assumidos na aplicação de regras de substituição ou instanciação para as variáveis funcionais.[15] No caso de *Principia Mathematica* de Whitehead e Russell, esses princípios são assumidos para as assim chamadas variáveis funcionais 'predicativas' na forma dos Axiomas da Redutibilidade introduzidos na seção *12.[16] Esquematicamente, essa família

13 Para uma discussão robusta e detalhada do contraste, veja-se, por exemplo, KLEMENT, 2004.

14 Cf. DUMMETT, 1981, pp.44-53.

15 Ver, por exemplo, LANDINI, 2012.

16 Cf. WHITEHEAD & RUSSELL 1925, p.167.

de axiomas pode ser apresentada – usando a notação da teoria dos tipos simples – nos seguintes termos:

> $(\exists F^{(t1,\ldots,tn)})(x_1,\ldots x_n){:}F^{(t1,\ldots,tn)}(x_1^{t_1},\ldots,x_n^{t_n}) \equiv A$, onde A é uma fórmula que não contém ocorrências livres da variável f.

Axiomas de compreensão formam parte integral da concepção de Lógica de Frege e Russell. Como nota Gregory Landini[17], são esses axiomas – e *não*, por exemplo, a possibilidade de expressar quantificação mista por meio do dispositivo notacional inventado por Frege e posteriormente modificado e popularizado por Whitehead e Russell – que tornam a Lógica uma Ciência *informativa*, i.e., que consiste em um conjunto de leis que possuem conteúdo. Também são esses axiomas que tornam possível, de uma forma ou de outra, a construção de uma teoria de conjuntos ou classes como a de *Principia* ou de cursos de valores de funções como a das *Leis Básicas* a partir dos assim chamados 'sistemas de lógica de ordem superior' formulados por Frege e Russell, uma vez que, para esses autores, respectivamente, a maneira mais natural de entender a noção de classe ou conjunto é enquanto a extensão de um conceito Fregeano[18] ou de uma função proposicional Russelliana. E essa é a ideia que fundamenta a concepção realista de Frege de extensões de conceitos como objetos lógicos assim como a teoria nominalista 'sem classes' [*No-Class Theory*] de *Principia Mathematica*. De fato, as construções de números como classes de equivalência requerem axiomas de compreensão (explicitamente declarada ou não) para funções (conceitos, em particular) ou para as chamadas 'funções proposicionais'. No caso de *Principia*, isso é explicitamente reconhecido por Russell quando o mesmo afirma que o papel principal do Axioma da Redutibilidade é permitir o desenvolvimento da teoria das classes – aliás, razão pela qual Russell se referia ao axioma como 'o Axioma das Classes'.[19]

A segunda consequência – que demanda uma explicação mais extensa – é que a estrutura dos tipos simples torna a 'existência' de números indutivos ou naturais (e, de fato, de números em geral) dependente da existência de 'objetos' ou 'indivíduos', ou seja, entidades do tipo simples mais baixo.

Como é bem sabido, no clássico *Os Fundamentos da Aritmética*[20] [*Grundlagen der Arithmetik*], Frege define "o número que convém ao conceito *F*" como "a extensão do conceito 'equinumérico ao conceito *F*'".[21] Essa definição identifica números cardinais com um tipo peculiar de objetos aos quais Frege se refere nas *Leis Básicas* como 'cursos de valores' [*Werteverläufe*] de funções. A definição cumpre o duplo propósito de, por um lado, vindicar uma das teses fundamentais dos *Fundamentos* de acordo com a qual uma "[...] indicação numérica contém um enunciado sobre um conceito"[22] e, por outro, possibilitar a prova do resultado fundamental de que ao conceito 'número natural menor ou igual a *n*' convém o número n+1, de onde se segue que todo número natural é diferente de seu sucessor e, portanto, que há infinitos números

17 Cf. LANDINI, 2012, pp.10-11.

18 É importante notar, no entanto, que a noção de 'curso de valor' de uma função Fregeana não pode ser diretamente identificada com a noção de classe; embora a noção de extensão de um conceito Fregeano cumpra, para todos os efeitos, o papel da noção de um conjunto no sentido usual no interior do sistema de Frege, a noção geral de curso de valor enquanto um objeto correlacionado com uma *função* é muito diferente daquela de classe ou conjunto, sendo que nem todo curso de valor é a extensão de um conceito (ver, por exemplo, COCCHIARELLA, 1986, LANDINI 2006 e 2012).

19 Cf. WHITEHEAD & RUSSELL, 1925, p.58 e p.167.

20 FREGE, 1884.

21 FREGE, 1884, §69.

22 FREGE, 1884, §46.

naturais.[23] Porém, como é bem sabido, essa estratégia tal como Frege a concebeu colapsa pois a teoria de de de extensões de conceitos (e de 'cursos de valores' de funções, de maneira geral) que Frege assume implicitamente nos *Fundamentos* e explicitamente nas *Leis Básicas* é inconsistente. Nos *Fundamentos*, no entanto, Frege também sugere uma abordagem diferente para vindicar a tese de que 'uma indicação numérica contém um enunciado sobre um conceito' geralmente mencionada como a estratégia 'adjetiva' (por oposição à estratégia 'substantiva' do parágrafo §69).[24] Essa estratégia consiste em analisar enunciados de atribuição de numérica apenas em termos de conceitos de segunda ordem[25], através dos dispositivos geralmente mencionados como 'quantificadores numericamente definidos'. A ideia básica ou núcleo dessa abordagem se resume às seguintes definições[26], onde empregamos a notação do circunflexo nas variáveis individuais similar a de *Principia* para nominalizar termos de ordem superior:

$$0(F) =_{Df} \sim(\exists x)Fx$$
$$\mathrm{n}+1(F) =_{Df} (\exists y)(Fy . n(\hat{x}(Fx . x \neq y)))$$

Essa estratégia – ou ao menos algo próximo dela[27] – é sugerida e descartada por Frege em favor da estratégia substantiva do parágrafo §69, mas é essa análise de atribuições numéricas que forma outro aspecto fundamental do que estou me referindo aqui como 'logicismo compartilhado' por Frege e Russell.

A teoria dos números cardinais desenvolvida por Whitehead e Russell na primeira parte do segundo volume de *Principia Mathematica*[28] é essencialmente baseada nessa estratégia adjetiva de acordo com a qual números não são nada mais do que conceitos de ordem superior análogos a quantificadores. *Principia* define números cardinais como classes similares (i.e., equinuméricas) a uma dada classe, ou seja, sendo uma classe ou conjunto qualquer, o número cardinal Nc' que convém a essa classe é definido do seguinte modo:[29]

$$\mathrm{Nc}`\alpha = \hat{\beta}(\beta\, sm\, \alpha),$$

onde "*sm*" é a relação que se mantém entre duas classes α e β se, e somente se há uma correspondência biunívoca entre os elementos de α e os elementos de β. Superficialmente, isso está de acordo com o tratamento 'substantivo' que Frege defende nos *Fundamentos* e nas *Leis Básicas* em detrimento da estratégia adjetiva dos quantificadores numericamente definidos. *Principia*, no entanto, não assume uma ontologia de conjuntos ou extensões, mas elimina contextualmente todas as ocorrências de expressões da forma $\hat{z}Az$ e variáveis como "α" e "β", de modo que toda e qualquer enunciado sobre classes (e, portanto, sobre números) recebe uma

23 Ver FREGE, 1884, §§81-3.

24 Ver, por exemplo, POTTER, 2000, pp.69-71.

25 Ou também, possivelmente, de ordem superior.

26 Ver, por exemplo, POTTER, 2000, p.71 ou LANDINI, 2006, p.210.

27 Para que o movimento realizado por Frege nos parágrafos §§55-6 possa ser lido como um argumento razoável, o lado esquerdo das definições dadas em termos dos quantificadores numericamente definidos devem ser tomados como enunciados de identidade da forma $n(F) = 0$, $n(F) = 1$, $n(F) = m + 1$, etc., onde "$n(F)$" é um termo singular, i.e., uma expressão que se refere a um objeto.

28 WHITEHEAD & RUSSELL, 1927.

29 WHITEHEAD & RUSSELL 1927, seção *100.

paráfrase em termos de uma asserção sobre as assim chamadas 'funções proposicionais'.[30] De fato, uma vez que a conveniente linguagem de superfície que *Principia* utiliza[31] é parafraseada (e, dados nossos propósitos, também é consideravelmente simplificada), podemos compreender as definições de 0 e sucessor de *Principia* de maneira praticamente análoga àquelas dadas em termos de quantificadores numericamente definidos que caracterizam a estratégia adjetiva rejeitada por Frege em favor da sua definição que apela a extensões de conceitos (i.e., conjuntos) enquanto objetos.[32]

A 'dificuldade' da análise de números como propriedades ou conceitos de ordem superior análogos aos quantificadores é que ela torna impossível provar, sem hipóteses adicionais, o resultado mencionado acima de que, para todo número natural n, $n \neq n+1$. Colocando de maneira informal, a razão para isso é bastante simples: como a definição de sucessor colocada nos termos da proposta 'adjetiva' que consideramos acima deixa claro, o conceito de ordem superior n+1(...) só será instanciado por um conceito *F* qualquer caso existam pelo menos n+1 objetos que caiam sob o conceito *F*, para usar a terminologia Fregeana. Se supormos, ao contrário, que para algum *n*, o número de entidades existentes do tipo simples mais baixo – i.e., objetos ou indivíduos – é exatamente *n*, então todos os conceitos de ordem superior n+1(...), n+1+1(...), e assim por diante serão instanciados exatamente pelos mesmos conceitos, a saber, por *nenhum conceito*, o que é exatamente a negação do resultado de que há infinitos números naturais (colocado nos termos da proposta adjetiva). Essa 'limitação' resulta da própria estrutura da hierarquia de tipos simples, seja ela compreendida em termos de funções Fregeanas ou das assim chamadas 'funções proposicionais' Russellianas: uma vez que números cardinais são compreendidos como conceitos ou funções proposicionais de ordem superior nos termos considerados acima, a existência de infinitos números naturais distintos (e, de fato, de números em geral, incluindo-se aí números transfinitos) depende da existência de objetos ou indivíduos na base da hierarquia.

De fato, em *Principia* a noção de classe é inteiramente supérflua, uma vez excluídas considerações de conveniência notacional: tivesse Russell adotado uma hierarquia extensional de funções proposicionais estratificada em tipos simples análoga àquela de Frege, seria possível, ao menos em princípio, demonstrar todos os resultados da Aritmética que *Principia* estabelece em termos do vocabulário da teoria dos conjuntos nos termos da estratégia adjetiva, embora isso implique o uso de uma notação cuja complexidade torne a tarefa quase impraticável.

Podemos então caracterizar o que estou chamando de 'forma compartilhada' da tese logicista nos seguintes termos. Primeiro, temos uma hierarquia dos níveis de expressões estruturada em termos dos tipos simples (de funções em geral no caso de Frege e das assim chamadas funções proposicionais no caso de Russell). A adoção dessa hierarquia de níveis, por sua vez, tem duas consequências para a fundamentação logicista da Aritmética. A primeira é que ela leva, inevitavelmente, ao compromisso – explicitamente articulado ou não – com o que hoje chamamos de axiomas de compreensão para variáveis de ordem superior. A segunda é que – uma vez que adotamos a tese central que é compartilhada por Frege e Russell de que atribuições

30 Cf. WHITEHEAD & RUSSELL, 1925, seção *20. A contrapartida ontológica desse dispositivo formal, claro, é a ideia de que "[...] classes não podem ser consideradas parte da mobília definitiva do mundo" (RUSSELL, 1919, p.182; minha tradução). O sucesso dessa estratégia, claro, depende crucialmente da espécie de explicação que é oferecida para a noção de função proposicional. Para discussões a esse respeito, veja-se, por exemplo, LANDINI, 1998, LINSKY, 1999 e FERREIRA, 2022, capítulo 4.

31 I.e., a linguagem da teoria dos conjuntos.

32 É plausível, aliás, a hipótese interpretativa de que o único motivo ou razão genuína que Frege possuía para introduzir números como objetos era a necessidade dessa suposição na prova esquematicamente indicada nos *Fundamentos* e demonstrada em detalhe nas *Leis Básicas* de que a totalidade dos números naturais é infinita. Para uma defesa dessa posição, veja-se DUMMETT, 1991, especialmente o capítulo 11.

numéricas são afirmações sobre conceitos ou funções proposicionais e, contra Frege, rejeitamos a ideia que números são objetos mas sim conceitos de ordem superior – a existência de uma totalidade infinita {0,1,2,3,...,n, n+1,...} de números naturais distintos depende da existência de uma totalidade infinita de objetos do tipo 'mais baixo'. Como afirmei na breve introdução do presente texto, minha proposta interpretativa é que essa forma de logicismo 'compartilhada' por Frege e Russell que acabamos de discutir é o alvo de Wittgenstein em 6.031.

2. O 'Logicismo' do *Tractatus* e a Rejeição do Logicismo de Frege e Russell em 6.031

As razões de Wittgenstein para rejeitar a hierarquia dos níveis são, *em linhas gerais*, claras e bem conhecidas. O ponto fundamental de Wittgenstein contra a tentativa de construir a gramática da Lógica nos termos propostos por Russell em *Principia Mathematica* é que "na sintaxe lógica, o significado de um sinal nunca pode desempenhar papel algum".[33] As regras da sintaxe lógica, nos diz Wittgenstein, devem "[...] poder estabelecer-se sem que se fale do significado de qualquer sinal", podendo-se "[...] pressupor *apenas* a descrição das expressões".[34] A hierarquia dos níveis apresentada tanto nos termos de Frege quanto de Russell violam a demanda feita por Wittgenstein nesses aforismos. O papel sintático de funções e nomes próprios – frequentemente elucidados por Frege em termos da metáfora da saturação[35] – são explicados em termos do tipo de entidade que essas expressões representam: o papel de nomes próprios – expressões completas ou '*saturadas*' – é referir a objetos, enquanto símbolos funcionais – expressões incompletas ou '*insaturadas*' – têm sua referência determinada apenas quando recebem determinação de seus argumentos ou de uma função de ordem superior.[36] Aqui – novamente, ressalvas acerca de detalhes à parte – cabem considerações análogas com respeito às funções proposicionais Russellianas que, de acordo com *Principia*, são "ambiguidades aguardando determinação": uma expressão de *Principia* como "ψ!z" tem seu papel sintático oposto ao papel dos nomes próprios e das variáveis individuais e a distinção de 'tipo' entre as assim chamadas 'funções' proposicionais é explicitamente explicado por Russell em termos do domínio de alcance dessas variáveis (variáveis do tipo mais baixo tendo como valores indivíduos do nível mais baixo, depois funções predicativas de indivíduos, funções predicativas de funções de indivíduos, e assim por diante). Como coloca Wittgenstein se referindo explicitamente à Teoria dos Tipos de Russell, o suposto erro aqui "[...] revela-se no fato de ter precisado falar do significado dos sinais ao estabelecer as regras notacionais"[37], sendo que as regras para o uso correto das expressões em questão deveriam "[...] evidenciar-se por si próprias, bastando apenas que se saiba *como*[38] cada sinal designa".[39] Assim, a formulação da hierarquia dos níveis de Frege e Russell viola uma das

33 TLP 3.33. Essa divergência aparece de maneira clara em afirmações feitas pelo próprio Russell, que após ler o *Tractatus* pela primeira vez, afirmou o seguinte em correspondência Wittgenstein, se referindo explicitamente ao aforismo 3.331: "The theory of types, in my view, is a theory of correct symbolism: (a) a simple symbol must not be used to express anything complex; (b) more generally, a symbol must have the same structure as its meaning." (McGUINNESS, 2008, p.96). A resposta de Wittgenstein é que a estratégia de Russell é ilegítima: "That's exactly what one can't say. You cannot prescribe to a symbol what it may be used to express. All that a symbol can express, it may express. This is a short answer but it is true!" (McGUINNESS, 2008, p.99).

34 TLP 3.33, nossa ênfase.

35 Cf. FREGE, 1892.

36 Novamente, o caso típico sendo o dos quantificadores.

37 TLP 3.331.

38 E, presumivelmente, não o *que* cada sinal designa.

39 TLP 3.334.

teses fundamentais do *Tractatus*: que tudo "o que *pode* ser mostrado não *pode* ser dito"[40]. Para Wittgenstein, uma explicação correta da sintaxe lógica deve *mostrar* ou *exibir* adequadamente o que não pode ser descrito por proposições genuínas[41], i.e., aquilo que Wittgenstein chama de propriedades e relações internas[42] e também o que ele chama de conceitos formais[43] que "[...] não podem, como os conceitos propriamente ditos, ser representados por uma função".[44]

A própria noção de número no *Tractatus* é um conceito formal.[45] Explicitamente se opondo à Frege e Russell, Wittgenstein afirma que conceitos formais devem ser representados em uma notação adequada por "[...] variáveis, não por funções ou classes".[46] É *este erro*, isto é, analisar as proposições da Aritmética nos termos da hierarquia dos níveis de funções e conceitos – em particular, analisando atribuições numéricas como sendo *essencialmente* asserções sobre conceitos ou funções proposicionais – e não, estritamente, o apelo à teoria dos conjuntos que, da perspectiva do *Tractatus*, consiste no pecado original do logicismo de Frege e Russell.

Dessa perspectiva, os dois aspectos do logicismo 'compartilhado' de Frege e Russell que considerei acima são dois sintomas de uma enfermidade mais grave. Sobre a necessidade de axiomas de compreensão, o problema fundamental é que axiomas desse tipo acarretam compromissos ontológicos de acordo com a interpretação ou 'modelo' que se adota com respeito à hierarquia dos níveis. Se a estrutura da teoria dos tipos simples for compreendida nos termos da interpretação mais natural de *Principia Mathematica*, por exemplo, de acordo com a qual 'funções proposicionais predicativas' são tratadas como entidades intensionais, i.e., enquanto uma teoria de atributos ou propriedades, o que o axioma afirma é que dada uma fórmula qualquer da linguagem objeto de *Principia* há uma propriedade ou relação *F* tal que a fórmula aberta "$F(x_1,...,x_n)$" é equivalente a "$A[x_1,...,x_n]$" para todos os argumentos $x_1,...,x_n$, onde *A* é uma fórmula arbitrária da linguagem objeto[47]. A queixa de Wittgenstein com respeito a essa pressuposição da Lógica Russelliana é bastante simples e direta: o que nos autoriza a introduzir, enquanto leis *lógicas*, tais axiomas? A resposta de Wittgenstein, claro, é que nada nos autoriza a fazer tal coisa. Para Wittgenstein, axiomas de compreensão como o Axioma da Redutibilidade de *Principia* só podem ser verdadeiros "acidentalmente", como ele coloca 6.031. Este ponto é também elaborado em 6.1231-6.1232, onde Wittgenstein menciona explicitamente o axioma. Ali Wittgenstein nos diz que "a validade geral da lógica pode ser chamada de essencial" em contraste com as proposições do dia-a-dia e das ciências empíricas:

> Proposições como o "Axiom of Reducibility" de Russell não são proposições lógicas e isso explica nosso sentimento: de que elas, se verdadeiras, só poderiam, contudo, ser verdadeiras por um feliz acaso.[48]

O que fundamenta essa afirmação é o fato de que "[...] pode-se pensar em um mundo onde não valha o 'Axiom of Reducibility'"[49] e que "[...] a lógica nada tem a ver com a questão

40 TLP 4.1212.

41 TLP 4.1213.

42 Cf. TLP 4.122.

43 Cf. TLP 4.126.

44 TLP 4.126. Aqui, claro, o que Wittgenstein está dizendo se aplica igualmente às funções Fregeanas ou às funções proposicionais Russellianas.

45 Cf. TLP 4.1272.

46 TLP 4.1272.

47 *Mutatis mutandis*, considerações similares se aplicam a funções e conceitos Fregeanos.

48 TLP 6.1232.

49 TLP 6.1233. De fato, essa foi uma objeção que Wittgenstein já havia elaborado explicitamente em 1913

de saber se nosso mundo realmente é ou não assim".[50] Como afirma Wittgenstein em 6.1222, uma proposição da lógica não pode "admitir refutação por nenhuma experiência possível" e "tampouco pode admitir confirmação por uma tal experiência". Fica claro porque o Axioma da Redutibilidade viola essa demanda quando consideramos o papel que ele cumpre no tratamento de *Principia* da noção de identidade. Como é bem sabido, Whitehead e Russell definem o sinal de identidade do seguinte modo:[51]

$$x=y=_{Df}(F)(Fx \supset Fy)$$

Onde "*F*" é uma variável de tipo simples arbitrário ou, na terminologia de *Principia*, uma variável funcional 'predicativa'. Dessa definição, segue-se que dois objetos *a* e *b* são distintos se, e somente se, há algum *F* tal que (ou, na terminologia de *Principia*, há alguma função predicativa verdadeira de *a* que não é uma função predicativa de *b*). A dificuldade aqui é sucintamente colocada por Wittgenstein nos seguintes termos:

> A definição de Russell para "=" não é satisfatória, porque não se pode, segundo ela, dizer que dois objetos têm todas as propriedades em comum. (Mesmo que essa proposição nunca seja correta, ela tem, toda via, sentido.)[52]

Aqui o leitor poderia objetar que a necessidade do Axioma da Redutibilidade é uma peculiaridade da lógica Russelliana tal como apresentada na Introdução da primeira edição de *Principia Mathematica*, onde Russell expõe o que ficou conhecido como teoria dos tipos 'ramificada'. De maneira geral, isso é certamente correto:[53] o Axioma da Redutibilidade afirma que dada uma função proposicional qualquer de 'ordem' arbitrária, há uma função proposicional predicativa (i.e., da ordem mais baixa compatível com seus argumentos) equivalente a essa função de ordem arbitrária. De fato, o Axioma da Redutibilidade – que, cabe lembrar, funciona, para todos os efeitos e propósitos, como axioma de compreensão de *Principia* – cumpre o papel de desfazer as limitações da assim chamada 'ramificação' da hierarquia dos tipos e, claro, Frege jamais sequer considerou restrições dessa espécie na sua formulação da hierarquia dos níveis de expressões: a Lógica Fregeana, ao contrário daquela de *Principia*, já de início só trata de funções concebidas de maneira puramente extensional[54] e sem a possibilidade de distinções no inte-

---

quando compôs as *Notes on Logic*: "Imagine we lived in a world in which nothing existed except 0 things and, over and above them, only a single relation holding between infinitely many of the things and in such a way that it did not hold between each thing and every other thing and further never held between a finite number of things. It is clear that the axiom of reducibility would certainly not hold good in such a world. But it is also clear to me that whether or not the world in which we live is really of this kind is not a matter for logic to decide." (McGUINNESS, 2008, p.58) No seu ensaio clássico, *The Foundations of Mathematics*, Ramsey levanta uma objeção similar (cf. RAMSEY, 1926, p.57).

50 TLP 6.1233.

51 Ver WHITEHEAD & RUSSELL, 1925, seção *13. Whitehead e Russell empregam em sua formulação a notação "*F*!*x*" para indicar que uma variável funcional *F* é predicativa e pode ser ligada a quantificador, por oposição a uma variável impredicativa que só ocorre livre. O uso dessa notação e dessa distinção é alvo de disputas interpretativas que apesar de importantes, podemos desconsiderar aqui (ver, por exemplo, CHURCH, 1976, LANDINI, 1998, LINSKY, 1999 e FERREIRA, 2022, capítulo 4).

52 TLP 5 5302.

53 Embora deva ser notado que a natureza e propósito dessa assim chamada ramificação e a questão de como a sintaxe da linguagem objeto de *Principia* pode ou deve ser interpretada são temas de diversas disputas ainda vigentes na literatura (veja-se, novamente, CHURCH, 1976, LANDINI, 1998, LINSKY, 1999 e FERREIRA, 2022, capítulo 4).

54 E, claro, de extensões como parte do aparato primitivo do seu sistema.

rior de um mesmo nível de acordo com o tipo de quantificação que a especificação da função ‘envolve’. Tudo isso, no entanto, é irrelevante para o ponto geral que estou apresentando. O que estou sugerindo é justamente que a presença e a necessidade de introduzir um axioma de compreensão impredicativo como o Axioma da Redutibilidade é apenas um sintoma particular do que, para Wittgenstein, era um vício geral compartilhado por Frege e Russell: o vício, de maneira breve, é a necessidade de assumir, em uma forma ou outra, axiomas que garantem a existência de funções, conceitos, relações, etc… no interior do que aqui estamos chamando de ‘hierarquia dos níveis’. Para estabelecer isso, basta considerarmos brevemente um movimento que é explicitamente criticado por Wittgenstein no *Tractatus*[55] que tanto Frege quanto Russell realizam – de maneiras exatamente análogas – em suas *magna opera*: a saber, a maneira através da qual eles definem a noção de número natural (e, de fato, o modo geral como eles tratam a noção de sucessão em uma série).

Como é bem sabido, Frege e Russell definem a classe dos números naturais (e demonstram o princípio de indução matemática) apelando à noção de ancestral com respeito a uma relação *R* que, por sua vez, é definida em termos das propriedades hereditárias dos termos de uma série gerada por uma relação *R*. De maneira simplificada, a definição de ‘*a* é um ancestral de *b* com respeito à relação *R*’ compartilhada por Frege e Russell é a seguinte:

$$aR_*b =_{Df} (F)(Fa.(x)(y)(xRy.Fx.\supset.Fy).\supset.Fb)$$

É apelando a essa ideia que, de maneira análoga àquela de Frege, Russell e Whitehead definem a noção de número natural em termos da relação $(+1)_*$, onde ‘(+1)’ é relação que se mantém entre um número n e seu sucessor imediato $n + 1$, ou seja: um número natural é qualquer coisa que pertence ao conjunto $Nc\ Induct = \alpha\{\alpha(+1)_*0\}$, ou como Russell coloca, a ‘posteridade de 0 com respeito à relação de predecessor imediato’.[56] Em símbolos:

$$Nc\ Induct\ (\alpha) =_{Df} (F)(F0.(\beta)(\gamma)(\gamma = \beta+1.F\beta.\supset F\gamma).\supset F\alpha)$$

Reiterando uma crítica feita por Poincaré, de acordo com a qual a definição de Frege e Russell da noção de número natural contém uma circularidade viciosa[57], Wittgenstein afirma que “é falsa” a maneira como Frege e Russell “pretendem exprimir proposições gerais como a formulada acima”, i.e., ‘*b* é um sucessor de *a*’ em uma série gerada por uma dada relação *R*.[58] Bom, justamente o componente essencial da teoria dos números naturais de *Principia* que torna viável a estratégia que Wittgenstein está criticando é o Axioma da Redutibilidade: é a presença do axioma que permite a Russell introduzir o que Poincaré chamou de ‘circularidade viciosa’, i.e., de empregar na própria definição de “” uma variável *F* cuja totalidade de valores incluem a própria relação . A crítica de Wittgenstein, no entanto, parece ainda mais radical do que a de Poincaré. A ‘circularidade’ é um sintoma mais geral da tentativa de explicar um conceito formal – a noção de sucessão em uma série e a própria noção de número natural e de indução

55 Cf. TLP 4.1273.

56 RUSSELL, 1919, p.22-3. Ver também WHITEHEAD & RUSSELL, 1925, pp.543-44 e 1927, pp.200-201. Cabe lembrar que, para Frege, números são cursos de valores ou extensões e, para Russell, atribuições numéricas são definidas contextualmente em termos de afirmações que empregam propriedades de nível/tipo superior.

57 De acordo com Wittgenstein ela “*contém um circulus vitiosus*” (TLP 4.1273).

58 TLP 4.1273.

matemática – recorrendo à linguagem da hierarquia dos níveis. Frege e Russell são obrigados[59] a recorrer – novamente, no caso de Frege implicitamente e no caso de Russell explicitamente – a axiomas de compreensão que garantem que existência, no interior da hierarquia dos níveis, de propriedades ou conceitos tais como 'ancestral de *a* na série-*R*', 'ancestral de 0 com respeito à relação +1', e assim por diante. É *isso* que, para Wittgenstein, é simplesmente inaceitável. Esses conceitos são conceitos formais, e como Wittgenstein coloca na sequência imediata do aforismo que critica a definição de Frege e Russell, "a questão da existência de um conceito formal é um contra-senso", pois "nenhuma proposição pode responder a uma tal questão".[60]

Exatamente o mesmo ponto cabe com respeito ao segundo aspecto do logicismo de Frege e Russell que consideramos na seção anterior. A necessidade de um axioma do Infinito surge em *Principia* porque Russell tenta, como afirma Landini, 'emular' uma teoria de tipos simples de classes com base em uma hierarquia de 'funções proposicionais'[61] (i.e., atributos ou propriedades), algo que Frege tentou evitar de maneira catastrófica assumindo sua Lei Básica V. O resultado, como vimos, é que atribuições numéricas, de acordo com essa análise, consistem em asserções que afirmam de uma dada função *F* de um dado nível *n*, que ela satisfaz uma função de nível superior *M* cujas condições de atribuição são exatamente análogas aos assim chamados 'quantificadores numericamente definidos'. Daí resulta que uma totalidade infinita de número naturais 'existe' apenas se, no nível mais baixo da hierarquia, há uma totalidade de pelo menos 'indivíduos' ou 'objetos'. A dificuldade aqui é a mesma apontada acima: novamente, a crítica de Wittgenstein é que, por terem analisado o conceito *formal* de 'número' em termos da hierarquia de funções e funções proposicionais, Frege e Russell foram levados a formular supostos resultados que, de acordo com Wittgenstein, são completos contrasensos, como "1 é um número" e "há apenas um zero" (para usar os exemplos do próprio *Tractatus*).[62] Que essa é a crítica de Wittgenstein nesses aforismos fica ainda em maior evidência quando atentamos ao aforismo que, no sistema de numeração do *Tractatus*, segue imediatamente o conjunto de aforismos 4.127-4.1274:

> 4.128 As formas lógicas são inumeráveis [*sind zahllos*]. Por isso não há na lógica números proeminentes, e por isso não há monismo ou dualismo filosófico, etc.

O que Wittgenstein afirma aqui é uma crítica explicitamente dirigida às diversas menções que Russell e Whitehead fazem em *Principia* à possibilidade de que o assim chamado 'Monismo', i.e., a tese de que há um único indivíduo ou objeto do tipo mais baixo, seja verdadeira.[63] Em *Principia*, essa possibilidade, é claro, inviabilizaria a prova de diversos resultados de-

---

59 E como já foi observado, a força desses axiomas está presente no sistema de Frege nas regras de substituição para variáveis de ordem superior. E sem compreensão impredicativa simplesmente não se pode provar o princípio de indução em suas formas mais robustas.

60 TLP 4.1274. Note-se que a segunda parte desse mesmo aforismo, na qual Wittgenstein afirma que "Portanto, não se pode perguntar, p.ex.: 'Há proposições sujeito-predicado não analisáveis?'" parece apontar para outra objeção contra o Axioma da Redutibilidade que, da perspectiva do *Tractatus*, é irremediável: o axioma pressupõe a forma das proposições elementares, no entanto, não podemos adentrar nesse ponto aqui por razões de escopo e espaço, assim o deixamos para outra ocasião.

61 Ver LANDINI, 2011b, pp.115-124.

62 Cf. TLP 4.1272.

63 Aqui cabe um breve esclarecimento acerca da noção de 'monismo' e seu uso por Whitehead e Russell. Em sua acepção mais geral ou radical, a tese monista é a tese segundo a qual toda distinção é, estritamente, espúria e que toda e qualquer complexidade – incluindo a pluralidade ou multiplicidade ontológica, dos 'entes' – é também espúria. Em *Principia*, no entanto, Whitehead e Russell usam "monismo" de forma mais específica, para se referir à tese de que há um único indivíduo em um dado tipo simples, em particular, no tipo simples mais baixo da hierarquia (veja-se, por exemplo, a passagem citada acima

sejáveis da teoria dos conjuntos e faria a Aritmética elementar colapsar. De fato, há pelo menos quatro menções da possibilidade do 'Monismo' no primeiro e segundo volumes de *Principia*. A primeira ocorre na seção *24. Comentando o teorema que estabelece que em todos os tipos o conjunto vazio Λ é distinto do conjunto universal V, Whitehead e Russell escrevem:

> If the monistic philosophers were right in maintaining that only one individual exists, there would be only two classes Λ and V, V being (in that case) the class whose only member is the one individual. Our primitive propositions do not require the existence of more than one individual.[64]

A segunda ocorre em um comentário sobre o teorema $* \, 50 \cdot 33$ cujo conteúdo específico não é diretamente relevante para nossos propósitos. O que é relevante, no entanto, é o antecedente ou hipótese do teorema, a saber $(\exists x,y).x \neq y$. Whitehead e Russell observam:

> In the above proposition (*50.33), the hypothesis [...] is equivalent to the hypothesis that more than one object exists of the type in question. For the lowest type, we can only prove the existence of at least one object: this is proved in *24.52. For the next type, we can prove the existence of at least two objects, namely, Λ and V; these are distinct, by *24.52. For the next type, we can prove the existence of 2^2 objects; for the next, 2^4, etc. But for the class of individuals we cannot prove, from our primitive propositions, that there is more than one object in the universe [...] we might, of course, have included among our primitive propositions the assumption that more than one individual exists, or some assumption from which this would follow, such as:
>
> $(\exists \phi, x, y). \phi ! x . \sim \phi ! y$
>
> But very few of the propositions which we might wish to prove depend upon this assumption, and we have therefore excluded it. It should be observed that many philosophers, being monists, deny this assumption.[65]

É importante notar que a afirmação de que "poucos resultados" dependem da hipótese de que há mais de dois indivíduos é provavelmente um gracejo (muito provavelmente da parte de Russell): como nota Boolos[66], poucos resultados podem depender *dessa* hipótese em particular, mas sem um número suficientemente grande de indivíduos distintos no nível mais baixo da hierarquia dos tipos não é possível provar que as inequações $2 \neq 3 \neq 4$, etc., são válidas em todos os tipos. De fato, a terceira menção da tese monista é justamente em relação a esse ponto específico:

> [...] suppose that the whole universe consists (as monists aver) of a single individual. Let us call the type of this individual "Indiv". Then $N_0C(Indiv)$ will consist of 0 and 1, *i.e.*

(WHITEHEAD & RUSSELL 1925, p.216)). Nesse sentido mais estrito, a complexidade ontológica não é completamente excluída dado que, se no tipo simples mais baixo há um único indivíduo *a*, temos entidades de tipos simples diferentes quando 'acendemos' na hierarquia. Cabe notar, entretanto, que se em um dado tipo simples temos um único indivíduo *a*, não há nenhum indivíduo que é distinto de *a*, mesmo que em outros tipos simples tenhamos propriedades distintas *F, G*, etc…, uma vez que, de acordo com a teoria dos tipos simples, a identidade é uma relação que só pode ser significativamente afirmada ou negada de pares de indivíduos de um mesmo tipo simples. Agradeço ao parecerista anônimo que aptamente observou a necessidade de esclarecer esse uso de 'monismo'. Devo agradecer também ao professor Gregory Landini que aponta as diferentes menções do 'monismo' em *Principia* em um texto que ele generosamente me permitiu a leitura antes de sua publicação.

64 WHITEHEAD & RUSSELL, 1925, p.216.

65 WHITEHEAD & RUSSELL, 1925, p.335.

66 Cf. BOOLOS, 1998, p.256.

$N_0C(Indiv) = \iota'0 \cup \iota'1$

But in the next higher type, there will be two members, namely Λ and Indiv. Thus

$N_0C(Indiv) = \iota'0 \cup \iota'1 \cup \iota'2$

Similarly $\quad N_0C(Indiv) = \iota'0 \cup \iota'1 \cup \iota'2 \cup \iota'3 \cup \iota'4$

the members of *t't'Indiv* being $\Lambda \cap$ *t'Indiv*, $\iota'\Lambda$, ι'*Indiv*, $\iota'\Lambda \cup \iota'$*Indiv*; and so on. (The greatest cardinal in any except the lowest type is always a power of 2).[67]

Finalmente, temos a quarta menção do monismo, que trata especificamente do ponto mencionado por Wittgenstein em 4.1272:

> We have $\exists!0_r$(*153 · 12) and $\exists!1_s$(*153 · 34), but from our primitive propositions we cannot deduce $\exists!2_r$ unless we rise above the lowest type of relations. The case is exactly analogous to that of $\exists!2$ (cf. *101); [...] But if monists aver, there is only one individual we shall not have $\exists!2_r$ in the type of relations of individuals to individuals. Our primitive propositions do not suffice to disprove this supposition.[68]

Essa última menção do monismo trata especificamente do ponto mencionado por Wittgenstein em 4.1272. Aqui Whitehead e Russell explicam a impossibilidade de provar, em um tipo arbitrário, a existência e unicidade do que *Principia* chama de o 'números-relacional'[69] [*relation-number*] 2_r (identificado com o número ordinal 2 no terceiro volume da obra). Aqui fica claro que esse é o alvo de Wittgenstein quando ele afirma que "Tanto é um contra-senso dizer 'há apenas um 1' quanto o seria dizer: '2+2 é às 3 horas igual a 4' "[70] e quando ele faz referência ao 'monismo' e ao 'dualismo' em 4.128.

Tudo isso, espero ter mostrado, fornece forte evidência para minha hipótese inicial: que a afirmação de Wittgenstein que a teoria das Classes é supérflua para a Matemática é uma crítica à tentativa de reconstruir a Matemática – a Aritmética em particular – em termos do aparato conceitual da teoria dos tipos simples originada na hierarquia dos níveis de funções e funções proposicionais no interior da qual atribuições numéricas são analisadas em termos de asserções sobre conceitos ou funções proposicionais (i.e., atributos), e não meramente uma crítica ao uso da Teoria dos Conjuntos na Matemática.

Voltando, então, ao meu objetivo inicialmente apresentado, penso que essas considerações podem nos ajudar a ter maior clareza sobre a motivação do assim chamado 'logicismo sem classes' do *Tractatus*. Colocando as coisas de maneira breve, a versão da tese logicista defendida por Wittgenstein no *Tractatus* pode ser compreendida como uma *generalização* ou versão radicalizada da estratégia adjetiva rejeitada por Frege.[71] O ponto de partida para essa generalização é dado no *Tractatus* nos seguintes aforismos:

> 4.127 A variável proposicional designa o conceito formal e seus valores designam os objetos que caem sob esse conceito.
>
> Só se pode exprimir o termo geral de uma série formal por uma variável, pois o conceito de termo dessa série formal é um conceito formal.

67 WHITEHEAD & RUSSELL, 1927, p.8.

68 WHITEHEAD & RUSSELL, 1927, p.325.

69 Cf. WHITEHEAD & RUSSELL, 1927, *153.

70 TLP 4.1272.

71 A ideia de que o *Tractatus* oferece uma radicalização da estratégia adjetiva é defendida em POTTER, 2000.

> Podemos determinar o termo geral da série formal especificando seu primeiro termo e a forma geral da operação que gera o termo seguinte a partir da proposição precedente.[72]

A generalização em questão consiste em subsumir o caso que Frege e Russell tomam como paradigmático e mais fundamental de atribuições numéricas – a saber, enumeração ou 'contagem' das entidades σ^t que caem sob um conceito ou função proposicional $\Gamma^{(t)}$ – sob a noção mais geral de enumeração ou contagem de aplicações de uma dada operação a um termo de uma série formal. Como coloca Cuter, "[...] a estratégia de Wittgenstein é mostrar que a contagem de objetos é apenas um caso especial de contagem de aplicações sucessivas de operações lógicas".[73] Novamente, sendo bastante breve, a estratégia do *Tractatus* consiste em adotar uma recursão como a seguinte enquanto fundamento da Aritmética:[74]

$$\Omega^0(t)=t$$
$$\Omega^{(n+1)}(t)=\Omega(\Omega^n(t))$$

Essa recursão define números como expoentes de uma operação lógica qualquer – seja ela uma operação de verdade ou não.[75] No caso de uma operação de verdade, expoentes numéricos registram as aplicações sucessivas que, a partir de uma base e a operação em questão, geram uma série de proposições como a seguinte (onde *N* é o operador proposicional de negação generalizada do *Tractatus*):[76]

$$N^0(p)=p$$
$$N^1(p)=N(p)$$
$$N^2(p)=N(N(p))$$

O caso que Frege e Russell tomaram como sendo o mais fundamental – i.e., contagem de objetos—se torna um caso particular da aplicação dessa forma geral. Um caso paradigmático é dado pela série formal[77] determinada pela expressão "[*aRb, aSb, R*|*S*]", a saber:

$$aRb$$
$$(\exists x):aRx.xRb$$
$$(\exists x)(\exists y):aRx.xRy.yRb$$
$$(\exists x)(\exists y)(\exists z):aRx.xRy.yRz.zRb$$
$$\ldots$$

72 TLP 4.1273.

73 CUTER, 2013, p.90.

74 Ver TLP 6.02-03. Aqui estamos seguindo uma reconstrução simples sugerida por Potter (2000, pp.178-9).

75 Ver CUTER, 2005 para uma discussão detalhada sobre operações de verdades e operações em geral no *Tractatus*.

76 A série em questão apesar de ser instrutiva do ponto de Wittgenstein de que a contagem de objetos é um caso particular da contagem de operações, como nota Cuter, não é muito interessante, sendo o que podemos nos referir como uma série 'entediante' ou 'enfadonha' (CUTER, 2013, p.87).

77 Tomamos emprestada aqui a formulação de Geach (1981, p.170). Recorde-se que aqui "*aRb*" é o termo inicial da série, "*aSb*" é um termo arbitrário da série e *R* | *S* é a operação a ser reiterada na geração de cada termo sucessivo da série a partir do termo inicial, onde "*R* | *S*" é o que Whitehead e Russell (1925, *34) chamavam de 'produto relativo' de *R* e *S*, isto é, a relação que se mantém entre *a* e *b* se, e somente se existe um *x* tal que *aRx* e *xSb*, sendo *S* nesse caso uma instância de *n* reiterações do produto relativo de *R* com ela própria, ou seja R|R, R|R|R, R|R|R|R, etc…

É empregando a noção de uma forma geral de séries de proposições como essa acima que o *Tractatus* expressa atribuições numéricas sem recorrer a uma teoria dos tipos de atributos e sem empregar a noção de identidade ou Axiomas da Redutibilidade. Uma proposição como '*a* não é um ancestral de *b* com respeito à relação *R*', por exemplo, é obtida negando a totalidade dessa série; '*a* é um ancestral de *b* com respeito à relação *R*' é obtida por meio da afirmação de *alguma* proposição dessa série; 'Há dois termos na série *R*', 'Há três termos na série *R*', 'Há quatro elementos na série *R*', e assim por diante, são afirmadas, cada uma delas, através da afirmação de um número determinado de termos dessa série até um certo ponto, e o mesmo vale para uma proposição como '*a* está a "*n*-passos" de *b* com relação à série gerada pela relação *R*'. O número aqui é o 'índice' que rastreia quantas reiterações da operação $R|S$[78] foram aplicadas à base inicial *aRb*, ou seja, quantos 'passos' na série *R* separam *a* de *b*, por assim dizer. Esse é o modo como Wittgenstein dispensa[79], no *Tractatus*, a teoria das classes.[80]

O que espero ter tornado claro – ou pelo menos plausível – até aqui é que Wittgenstein, de fato, dispensa muito mais do que apenas a teoria dos conjuntos, i.e., que a conclusão apresentada em 6.031 pode – e talvez deva – ser lida como um diagnóstico ainda mais geral de quão mal orientado o projeto logicista de Frege e Russell era da perspectiva do *Tractatus*.

3. O Papel da Noção de Classe no *Tractatus*

Encerrando minha discussão, gostaria de fazer algumas observações sobre o papel da noção de classe no *Tractatus*. Para esse fim, tomo como ponto de partida a seguinte passagem de um artigo curto porém de grande importância no qual Peter Geach discute a possibilidade de expressar proposições contendo generalidade com o operador *N*. Neste texto, encontramos a seguinte passagem:

> Notice that although the class-of-propositions notation is iterated, we do not get classes of classes of propositions, but only classes of propositions. *Wittgenstein was exaggerating when he said that the theory of classes is altogether superfluous in mathematics (6.031) for he cannot get on without classes of propositions.* But his set theory is very rudimentary: it has no null class, nor has it classes of classes; and by the same token it can never generate any Russellian paradoxes. *About the set theory in the Tractatus, the excuse that it is only a very little one may reasonably be heard from a defender of Wittgenstein.*[81]

Não há nada estritamente errado nas afirmações de Geach, mas há uma 'implicatura', digamos, que pode ser naturalmente extraída do que ele afirma, a saber: que a *noção* de 'classe', de acordo com o *Tractatus*, é uma noção completamente espúria do ponto de vista da Lógica e da Matemática. E isso pode ser um equívoco, dependendo do que se quer dizer.

Para evitarmos discutir mera terminologia, podemos deixar claro desde já que, de acordo com o *Tractatus*, do ponto da Lógica e da Aritmética, a noção Cantoriana de classe ou conjunto [*Menge*] enquanto uma entidade ou objeto distinto de seus membros é espúria; a noção Fregeana de extensão ou curso de valor de uma função [*Wertverläufe*] enquanto um objeto lógico é espúria; a noção Russelliana de classe ou extensão de uma função proposicional enquanto

78 Novamente, onde *S* é qualquer instância de *n* reiterações do produto relativo de *R* com ela própria,ou seja R|R, R|R|R, R|R|R|R, etc…

79 Isto é, para os propósitos de fundamentação da Aritmética.

80 Novamente, para uma discussão detalhada do Logicismo *Tractariano* referimos o leitor ao estudo CUTER, 2005.

81 GEACH, 1981, p.169. Nossa ênfase.

uma ‘ficção’ ou ‘construção’ lógica também é espúria. Isso não quer dizer, entretanto, que, para Wittgenstein, a noção de classe pode ser completamente dispensada. Nessa última seção, ao contrário, gostaria de chamar atenção para o fato de que Wittgenstein está dizendo que a *Teoria* das classes é espúria, não que a noção de classe o é.

De fato, a noção de classe é empregada várias vezes no *Tractatus* – implícita ou explicitamente – em lugares cruciais. Dois exemplos do uso implícito da noção de classe ocorrem, respectivamente, na introdução do operador *N* nos aforismos 5.5's (em particular 5.501-02) e da forma geral da proposição nos aforismos 6-6.001. Não é apenas legítimo parafrasear as afirmações de Wittgenstein feitas nesses aforismos utilizando a noção de uma classe de proposições, mas essa mesma noção tem um papel essencial a cumprir, como Wittgenstein deixa claro, nos aforismos em que ele introduz a noção de variável proposicional e a noção crucial de seleção formal ou aplicação seletiva[82] de uma operação. Veja-se, por exemplo:

> 3.315 Se transformamos em variável uma parte constituinte de uma proposição, há uma classe de proposições que são todos os valores da proposição variável assim originada. Em geral, essa classe depende ainda do que nós, segundo uma convenção arbitrária, queremos significar com partes daquela proposição. [...]
>
> 3.316 Os valores que a variável proposicional pode assumir são fixados. A fixação dos valores é a variável.
>
> 3317 A fixação dos valores da variável proposicional é a especificação das proposições cuja marca comum é a variável.

O que Wittgenstein está dizendo aqui é bastante simples: dada uma proposição completa como ‘*aRb*’ podemos, de acordo com uma convenção arbitrária – por exemplo, colocando variáveis *x*, *y*, *z*, etc… no lugar dos nomes “*a*” e “*b*” – utilizar esse sinal proposicional para obter o que Wittgenstein chama de variável proposicional, i.e., uma variável cujos valores são proposições; assim, uma expressão como “*xRb*” é uma variável proposicional cujos valores consistem na totalidade de proposições ‘*aRb*’, ‘*cRb*’, e assim por diante. O papel dessa variável proposicional é justamente fazer um recorte ou uma seleção formal dessa totalidade, dessa *classe* de proposições que, como Wittgenstein afirma, ‘fixamos’ por meio de convenções de como designar com sinais.

O que gostaria de chamar atenção é que o uso dessa noção de classe de proposições enquanto uma totalidade – ou classe – formalmente selecionada é ineliminável e essencial para os propósitos do *Tractatus*. Tome-se, por exemplo, novamente, a série de proposições determinada pela seguinte expressão:

$$[aRb,\ aSb,\ R|S]$$

i.e.:

$$aRb,\ (\exists x){:}aRx.xRb, (\exists x,y){:}aRx.xRy.yRb\ldots$$

Para que o ‘sistema’ do *Tractatus* possa expressar o que Frege e Russell expressam em seus sistemas por meio da noção de propriedades hereditárias, como atribuições de cardinalidade tais como ‘há zero termos na série-*R*’, ‘há um termo na série’, ‘há *n* termos na série-*R*’, e assim por diante, é imprescindível que se possa falar em totalidades formalmente selecionadas – i.e., *classes* de proposições – da forma *xRy*, *xRb*, *aRy*, *aRx.xRb*, etc.

Ao situar o papel desempenhado pela noção de classe no *Tractatus*, o ponto fundamental a ser observado é aquele proposto por Cuter e que também procurei enfatizar aqui discutindo a rejeição *Tractariana* da assim-chamada ‘hierarquia dos níveis de Frege e Russell’: que a

82 Ver CUTER, 2005 para uma explicação dessa noção.

Lógica do *Tractatus* é uma Lógica *sem* hierarquias[83]. A noção de uma classe de proposições é mantida por Wittgenstein como um dispositivo formal, a ser explicado em termos das noções mais fundamentais de uma variável proposicional e de generalidade: uma classe de proposições nada mais é do que uma dada totalidade de valores formalmente circunscrita de uma variável proposicional.[84] O que Wittgenstein repudia é qualquer tentativa de dar substância à noção de classe retificando-a termos de uma ontologia de *objetos* 'correlacionados'[85] a uma hierarquia de funções, como fez Frege, ou mesmo explicando a noção como sendo parasitária da hierarquia subjacente de 'funções proposicionais' ou atributos como Whitehead e Russell o fizeram em *Principia*. Seguindo a letra do *Tractatus*, poderíamos dizer: a teoria das classes é supérflua na Matemática; precisamos apenas da noção de uma totalidade formalmente selecionada de proposições.[86]

Referências

BOOLOS, G. 1998. The Advantages of Theft Over Honest Toil. In: JEFFREY, R. (ed). *Logic, Logic and Logic*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, pp.255-274.

CHURCH, A. 1940. A Formulation of the Simple Theory of Types. *The Journal of Symbolic Logic*. vol. 5, n. 2., pp. 56-68.

CHURCH, A. 1976. A Comparison of Russell's Resolution of the Semantical Antinomies With That of Tarski. *The Journal of Symbolic Logic*. vol. 41, n. 4, pp.747-60.

COCCHIARELLA, N. 1986. Frege, Russell and Logicism: A Logical Reconstruction. In: HAAPARANTA, L. & HINTIKKA, J. (eds). *Frege Synthesized*. Reidel Publishing Company, pp.197-252.

CUTER, J.V. 2005. Operations and Truth-Operations in the *Tractatus*. *Philosophical Investigations*, vol. 28, n.1, pp.63-75.

CUTER, J.V. 2013. Logic Without Hierarchies. *O que nos faz Pensar?*, vol. 22, n. 33, pp.80-94.

DUMMETT, M. 1981. *Frege: Philosophy of Language*. Segunda Edição. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

DUMMETT, M. 1991. *Frege: Philosophy of Mathematics*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1991.

Fogelin, R. *Wittgenstein*. London: Routledge.

FERREIRA, R. S. 2022. *Logic, ontology, and arithmetic : a study of the development of Bertrand Russell's Mathematical Philosophy from The Principles of Mathematics to Principia Mathematica*. Porto Alegre. 504 paginas. Tese de Doutorado em Filosofia. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Departamento de Filosofia e Ciências Humanas, Programa de Pós-Graduação em Filosofia.

FREGE, G. 1884. *Os Fundamentos da Aritmética.* In: Coleção *Os Pensadores*, Vol XXXVI. Ed. Victor Civita. Trad: Luiz Henrique Lopes dos Santos. São Paulo: Abril Cultural.

FREGE, G. 2013. *The Basic Laws of Arithmetic Vols 1 & 2*. Ed e trad: EBERT, P., ROSSBERG, M. e WRIGHT, C. Oxford: Oxford University Press.

83 Cf. CUTER, 2013.

84 Cf. TLP 3.315.

85 Cf. LANDINI, 2006.

86 Agradeço a um parecerista do presente texto por sugerir essa formulação da posição aqui defendida. Também deixo aqui meus agradecimentos aos organizadores do evento comemorativo dos 100 anos do TLP – Marcos Silva e Anderson Nakano – em que uma versão preliminar desse texto foi apresentada, bem como ao corpo editorial e pareceristas pelas críticas, sugestões, comentários e correções valiosas que contribuíram para a melhoria do presente texto.

FREGE, G. 1980. *Philosophical and Mathematical Correspondence.* Ed e trad: por GABRIEL, G. *et al*. Oxford: Basil Blackwell.

FREGE, G. 1892. *On Concept and Object.* In: *Collected Papers on Mathematics, Logic and Philosophy.* Ed e trad: McGUINNESS, B. Oxford: Blackwell, 1984, pp.182-194.

GEACH, P. 1981. Wittgenstein's N-Operator. *Analysis*, vol. 41, n. 4, pp.168-171.

KLEMENT, K. 2004. Putting Form Before Function: Logical Grammar in Frege, Russell, and Wittgenstein. *Philosophers' Imprint*, vol. 4, n. 2, pp.1-47.

KLEMENT, K. 2010. The Functions of Russell's No-Class Theory. *The Review of Symbolic Logic*, vol. 3, n. 4, pp.633-664.

LANDINI, G. 1998. *Russell's Hidden Substitutional Theory*. Oxford: Oxford University Press.

LANDINI, G. 2006. Frege's Cardinals as Concept-Correlates. *Erkenntnis*, vol. 65, n. 2, pp. 207-243.

LANDINI, G. 2011a. Logicism and the Problem of Infinity: the number of numbers. *Philosophia Mathematica*, vol. III, n.19, pp.167-212.

LANDINI, G. 2011b. *Russell*. Londres: Routledge.

LANDINI, G. 2012. *Frege's Notations: What they are and how they mean.* New York: Macmillan.

LINKSY, B. 1999. *Russell's Metaphysical Logic*. Stanford: CSLI Press,.

MARION, M. 1998. *Wittgenstein, Finitism and the Foundations of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

POTTER, M. 2000. *Reason's Nearest Kin: Philosophies of Arithmetic From Kant to Carnap*. Oxford: Oxford University Press.

RAMSEY, F. 1926. The Foundations of Mathematics. In: BRAITHWAITHE, R. B. (ed). *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*. Londres, Routledge and Kegan Paul, 1931, pp., 1-61.

RUSSELL, B. 1919. *Introduction to Mathematical Philosophy*. Londres: Allen & Unwin.

WAHL, R. 2011. The Axiom of Reducibility. *Russell: The Journal of Bertrand Russell Studies*. vol. 31, n.1, pp.45-62.

WHITEHEAD, A. N. & RUSSELL, B. 1925. *Principia Mathematica*. Vol.1. Segunda Edição, Cambridge: Cambridge University Press.

WHITEHEAD, A. N. & RUSSELL, B. 1927. *Principia Mathematica Vol.2*. Segunda Edição, Cambridge: Cambridge University Press.

WITTGENSTEIN, L. 1993. *Tractatus Logico-Philosophicus*. Trad. Luiz Henrique Lopes dos Santos. São Paulo: EdUSP. [Abreviatura para citação: "TLP" seguido do número do aforismo]

WITTGENSTEIN, L. 2008. *Wittgenstein in Cambridge: Letters and documents 1911-1951.* Ed e trad: McGUINNESS, B. Londres: Blackwell.

Resumo

Wittgenstein afirma no Tractatus que a teoria das classes é supérflua na Matemática e que isso está relacionado ao fato de que a generalidade exigida pela Matemática não é "acidental" (TLP 6.031). O objetivo deste texto é elucidar essa afirmação chamando a atenção para o que, seguindo Gregory Landini, tomaremos como uma forma de Logicismo compartilhada por Frege e Russell. Esta forma de Logicismo tem dois princípios básicos, a saber: o uso de uma teoria lógica cujas variáveis estruturadas incorporam o que hoje chamamos de teoria dos tipos simples e a análise de atribuições numéricas em termos de afirmações sobre conceitos ou atributos que empregam conceitos de ordem superior exatamente análogos aos chamados quantificadores 'numericamente definidos'. Argumentamos que é esse arcabouço teórico que Wittgenstein está rejeitando em 6.031 e não apenas o uso da Teoria dos Conjuntos na Matemática. Também é defendido que a noção de classe ainda tem um papel essencial a desempenhar no Tractatus.

Palavras-Chave: Wittgenstein; Tractatus; Frege; Russell; Teoria dos Tipos; Teoria dos Conjuntos.

Abstract

Wittgenstein claims in the Tractatus that the theory of classes is superfluous in Mathematics and that this is related to the fact that the generality required by Mathematics is not "accidental" (TLP 6.031). My aim in this paper is to elucidate this claim by calling attention to what, following Gregory Landini, I refer to as a form of Logicism shared by Frege and Russell. This form of Logicism has two main tenets, namely: the use of a logical theory whose structured variables embody what we nowadays call the simple theory of types and the analysis of number ascriptions in terms of assertions about concepts or attributes which employ higher-order concepts exactly analogous to so-called 'numerically definite' quantifiers. It is argued that it is this shared theoretical framework that Wittgenstein is rejecting in 6.031 and not just the use of Set Theory in Mathematics. It is also argued that the notion of class still has an essential role to play in the Tractatus.

Key-words: Wittgenstein; Tractatus; Frege; Russell; Type Theory; Set Theory.