ANALYTICA
REVISTA DE FILOSOFIA
volume 26
número 1
2022

O Problema das Duas Médias Proporcionais: Descartes entre Mydorge e Roberval (1625-1637)

Apaoan Ramos Machado
Doutorando UCLouvain

Introdução

O problema das duas médias proporcionais[1] é reescrito modernamente do seguinte modo: dado dois segmentos de reta x e y, encontrar as duas médias proporcionais (isto é, dois segmentos de reta) x e y, tais que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$ Embora tal problema tenha sua origem na matemática clássica, foi um dos mais debatidos no século XVII dentre os problemas clássicos que não podem ser resolvidos por régua e compasso (ou melhor, retas e círculos)[2]. Em sua mocidade, Descartes chegara a pensar que o problema das duas médias proporcionais seria resolvido a partir da construção de compassos teóricos, mais precisamente como um caso particular do *mesolabium*, que lhe servia na resolução de problemas com quaisquer médias proporcionais. Esses compassos, no entanto, foram deixados de lado e deram lugar a um crescente papel da álgebra em sua obra. Já em 1637, no livro III d'*A Geometria*, a adoção de métodos algébricos para a resolução de problemas geométricos o levou à construção geral de raízes do terceiro e quarto graus, agora por meio de uma parábola e um círculo. Todavia, antes da publicação dos resultados que aparecerão n'*A Geometria*, Descartes buscava ao lado de outros matemáticos (nomeadamente Mersenne, Beeckman, Mydorge e Roberval) a solução para o problema das duas médias proporcionais. Com efeito, no presente texto pretendemos: (i) reconstruir as lacunas no desenvolvimento histórico desse problema antes da publicação d'*A Geometria*, um período que vai de 1625 até 1637, com a tradução dessas demonstrações (ao fim deste texto); (ii) e extrair alguns elementos que justifiquem as preferências demonstrativas de Descartes a partir de uma comparação de sua demonstração com as de Mydorge e Roberval.

1 Nos últimos anos, o problema das duas médias proporcionais vem atraindo a atenção de diversos especialistas. Vale destacar as contribuições de SERFATI (2002, p. 95-104) e RABOUIN (2018, p. 95-104), os quais pensam que esse problema foi determinante na elaboração da álgebra de Descartes. Outros, ainda, se interessaram pela prova de impossibilidade da construção do problema das duas médias proporcionais, a exemplo de BOS (2001, p. 255-260), LÜTZEN (2010, p. 12-18) e CRIPPA (2014, p. 207-208). A propósito, convém esclarecer de antemão que a obra de Descartes será citada do seguindo modo: AT (as iniciais dos editores Charles Adam e Paul Tannery), volume e página. Quanto às traduções, os colchetes marcam as palavras que introduzimos e que não constam no texto original. Último, mas não menos importante: sou grato ao Professor Abel Lassalle Casanave (UFBA) por seus preciosos conselhos durante o meu mestrado na PUC-Rio, que me levaram à elaboração deste texto.

2 Cf. BOS, 2001, p. 27.

"Novos Arquimedes" da França, uni-vos!

Em *La vérité des sciences* (1625), Mersenne convoca os matemáticos de sua época a buscarem uma solução para os problemas especiais da geometria grega, os quais não podem ser resolvidos meramente por meio de régua e compasso. São eles: a quadratura do círculo, a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo.

> Queira Deus nos fazer renascer neste século alguns novos Arquimedes, que conduzam as Matemáticas até a sua última perfeição, e que imponham um silêncio eterno à quantidade de ignorantes que querem persuadir, por meio de seus sofismas e paralogismos, de que eles encontraram a *quadratura do círculo, a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo*, e reconheceram diversos erros nas definições e proposições de Euclides, ainda que a maior parte destes temerários não saibam sequer os primeiros termos da Geometria nem a maneira de se falar acerca deles. Eis por que sei com muito gosto que os excelentes geômetras não querem conferenciar com eles, nem sequer escutá-los, de medo que, por tal condescendência, se crêsse que eles aprovassem a ignorância destes temerários[3].

Descartes atendeu prontamente ao apelo do mínimo, e pôs-se a investigar com afinco o problema das duas médias proporcionais. Já no verão de 1625, Descartes enviou uma construção (sem demonstração) ao problema das duas médias proporcionais a Mersenne, o qual viria a publicá-la anos mais tarde nos *Harmonicorum instrumentorum libri IV* (1636) e na segunda parte da *Harmonie universelle* (1637)[4]. Tal construção fora divulgada por Mersenne a outros matemáticos. Um deles, Roberval, forneceu uma demonstração – que Descartes tomará notícia em 1632 e que será publicada junto com a construção deste último nos livros supracitados do padre Mersenne. Todavia, ainda no ano de 1625, Descartes recebeu uma demonstração elaborada, ao que tudo indica, por Mydorge, que é referido por Beeckman como um "certo matemático francês de Paris"[5].

No outono de 1628, em uma visita a Beeckman[6], Descartes apresentou-lhe os resultados de sua investigação matemática. O fruto desse encontro apareceria cerca de três meses

---

3 No texto em francês, lê-se o seguinte: *Plaise à Dieu de nous faire renaistre en ce siecle quelques nouveux Archimedes, qui conduisent les Mathematiques jusques à leur derniere perfection, & qui imposent un silence éternel à quantité d'ignorans qui veulent persuader par leurs sophismes, & paralogismes, qu'ils ont trouvé la quadrature du cercle, la duplication du cube, la trisection de l'angle, & reconu plusieurs erreurs dans les definitions, & propositions d'Euclide, bien que la pluspart de ces temeraires ne scachent pas seulement les primiers termes de la Geometrie, ni la maniere d'en parler. C'est pourquoy ie scay fort bon gré aux excellents Geometres de ne vouloir pas conferer avec eux, ni mesme les écouter, de peur que par ceste condescendence on croye qu'ils approuvent l'ignorance de ces temeraires.* Cf. MERSENNE, 1625, p. 750.

4 Ambas as obras de Mersenne são de teoria musical e servem à determinação de tons e semitons – o que, por sua vez, é útil aos fabricantes de instrumentos. Na versão em latim, encontramos uma instrução de construção para os fabricantes de sino, ao passo que, na versão francesa, há instruções aos construtores de órgão.

5 No original: *mathematicus quidam Gallus Parisijs*. *Descartes e Beeckman* (AT, X, 342). Curiosamente, a demonstração de Mydorge divide-se em três etapas: analiticamente (᾽Αναλιτικῶς), sinteticamente (Συνθετικῶς) e demonstração (᾽Απόδειξις).

6 Essa visita é relatada pelo próprio Beeckman: "O Senhor René Descartes du Perron, que redigiu para mim no ano de 1618 em Breda, em Brabante, um *Compêndio de Música*, no qual ele me expôs sua posição sobre a música e que está inserido nesta obra, ele, digo, foi a Dordrecht para me visitar no dia 8 do mês de outubro de 1628, uma vez que outrora veio em vão da Holanda a Midelburgo, a fim de lá me encontrar." No original: *D. Renatus des Cartes du Peron, qui anno 1618 in meam gratiam Bredae Brabantinorum Musicae Compendium conscripsit), quo suam sententiam de musicâ mihi aperuit quodque huic operi insertum est), is, inquam, die 8º mensis Octobris 1628 ad me visendum venit Dortrechtum, cùm priùs frustra ex Hollandiâ Middelburgum venisset, ut me ibi quaereret. Descartes e Beeckman* (AT, X, 331).

depois, em 1629, publicado no *Journal* de seu amigo holandês. Nele, fora publicada não somente a demonstração de Mydorge (em uma possível colaboração com Descartes), mas também uma construção de autoria do próprio Descartes para raízes de equações do terceiro e quarto graus ($z^4=\pm az^2\pm bz\pm c$), a qual é feita também a partir da intersecção de uma parábola e de um círculo e que torna de modo engenhoso o problema das duas médias proporcionais um caso particular da construção dessas equações. Tanto a demonstração de Mydorge como a de Descartes serão publicadas no *Journal* de Beeckman a pedido de Descartes em 1629. Ademais, a de Mydorge será repetida no terceiro livro d'*A Geometria* (1637) com algumas alterações e reescrita algebricamente ($z^3=a^2q$), onde a e q são duas linhas entre as quais se pretende inserir duas médias proporcionais, mas ali sem nenhuma referência a Mydorge e margeada somente pelo seguinte subtítulo: "A descoberta de duas médias proporcionais"[7].

Ao compararmos as duas demonstrações de duas médias proporcionais, a de Roberval e a de Mydorge (elaborada presumivelmente em parceria com Descartes), notamos uma diferença marcante nos passos das provas. Essa diferença, como bem observa Shea[8], consiste no fato de Roberval seguir um "estilo euclidiano", aplicando explicitamente e repetidas vezes a proposição II.7 e os axiomas I.2 e I.3 d'*Os Elementos*. Ora, recorrer ao livro II d'*Os Elementos* de Euclides não é nenhuma novidade quando se trata da resolução de problemas que envolvem secções cônicas. O próprio Apolônio de Perga já se valia do livro II (paralelogramos) e dos livros V e VI (teoria das proporções) na resolução de problemas que envolviam secções cônicas[9]. Roberval adota, ainda, uma linguagem essencialista (*e. g.*: "conforme a natureza da parábola") na sua demonstração. Mydorge, por outro lado, não procede assim, nem muito menos Descartes em seu método de construção de equações de terceiro e quarto graus. Não há nestes últimos, portanto, nenhuma referência declarada a teoremas euclidianos e não empregam uma linguagem essencialista, que é substituída, no caso da demonstração de Descartes, por uma linguagem construtiva de comando. A não referência a Euclides não é um elemento trivial. Mydorge dirá em seus *Prodromi catoptricorum et dioptricorum* (1631) que, no fito de simplificar ao máximo suas demonstrações, evita propositalmente a menção aos geômetras antigos, algo que é analisado cuidadosamente por Maierù[10]. Além disso, Mydorge em sua demonstração evoca a utilização de triângulos semelhantes (que por sinal depende implicitamente da demonstração euclidiana VI.5), uma estratégia demonstrativa que ele apela muitas vezes em sua obra citada acima. Os triângulos

7 Como é dito: *L'invention de deux moyenes proportionelles*. *A Geometria* (AT, VI, 469).

8 Cf. SHEA, 1993, p. 86.

9 Para uma análise da aplicação do livro II d'*Os Elementos* de Euclides na resolução de problemas envolvendo secções cônicas, cf. SAITO, 1985.

10 Sem abjurar o legado da tradição clássica, Mydorge em sua obra afirma que nela não haverá espaço para citações dos trabalhos dos matemáticos antigos. Seu objetivo: a simplificação das provas. Vejamos o que diz o amigo de Descartes: "De resto, nem um nem outro ocorrerá em nenhum trecho, isto é: a indicação ou a menção de autores. Uma norma da obra será seguida: a razão geométrica dos elementos de Euclides – com a qual, se alguém estiver minimamente habituado, não sentirá dificuldade alguma e sem dificuldade percorrerá facilmente todo o edifício com seus próprios pés. [...] de tal modo, que devam também parecer de longe mais simples que os elementos de Apolônio, pois contêm as fontes de onde o mesmo Apolônio, por meio de um artifício oculto, deduziu riachos precípuos e capitais". No original: *Quanquam & neuter ullibi ut auctor designatus aut invocatus occurret. Norma operi una erit geometrica ratio Euclideis elementis contenta, cui si quis vel tantillum assueverit nullum inibi sentire obicem, & inoffenso pede totum facile percurret aedificium. [...] eiusmodi etiam ut elementis & Apollonianis longe videri debeant simpliciora: quandoquidem & fontes continent unde ipse Apollonius oculto artificio praecipuos & capitales deduxit rivulos*. Cf. MYDORGE, 1631, n. p. Cf. MAIERÙ, 2009, p. 108-109.

semelhantes, como também observou Shea na mesma passagem mencionada, era o método preferido de Descartes, confessado pelo próprio matemático em uma carta a Elisabeth:

> Sempre observo, ao investigar uma questão de Geometria, que as linhas das quais me sirvo para resolvê-la sejam paralelas ou se entrecortem em ângulos retos tanto quanto possível; e *não considero outros teoremas, senão que os lados dos triângulos semelhantes tenham proporção semelhante entre si* e que, *nos triângulos retângulos, o quadrado da base seja igual aos dois quadrados dos lados*. E não temo supor muitas quantidades incógnitas, a fim de reduzir a questão a tais termos, dependendo senão desses dois teoremas; ao contrário, prefiro supô-las em maior que em menor quantidade. Pois, por esse meio, vejo mais claramente tudo que faço, e, ao resolvê-las, encontro melhor *os caminhos curtos; e me isento de multiplicações supérfluas*; ao invés de se prolongar outras linhas, e de se servir de outros teoremas, ainda que se possa chegar por sorte a um caminho mais curto que o meu, dá-se todavia quase sempre o contrário. E não se vê tão bem o que se faz, a não ser que se tenha a demonstração do teorema em questão bem presente ao espírito; e, nesse caso, quase sempre, depende-se da consideração de alguns triângulos, que são ou retângulos ou semelhantes entre si, e assim se regressa no caminho que proponho. (GRIFO NOSSO)[11]

As observações de Shea são notórias, mas cremos não serem suficientes para entender o porquê de Descartes ter ignorado a demonstração de Roberval e aprovado a demonstração de Mydorge, servindo-se dela inclusive n'*A Geometria*. Que Descartes desprezasse a demonstração de Roberval somente por estar em "estilo euclidano" (no sentido em que se refere explicitamente a princípios e teoremas da geometria de Euclides), não nos parece ser o caso. E isso porque o próprio Descartes, embora não se servisse do método axiomático, não mantém nenhuma restrição à aplicação de teoremas euclidianos, chegando ele mesmo a utilizá-los em diversas passagens d'*A Geometria*, a exemplo de provas do livro VI d'*Os Elementos.* Mais adiante, discutiremos as sutilezas por atrás das demonstrações de cada um dos personagens envolvidos. Mas antes cumpre conhecê-los um a um.

O problema das duas médias proporcionais na correspondência

É em sua correspondência com Mersenne que Descartes manifesta sua reação às duas demonstrações, uma de Mydorge e outra de Roberval. Além disso, é graças a essa troca de

11 Segue a versão original: *I'observe tousjours, en cherchant une question de Geometrie, que les lignes, dont ie me sers pour la trouver, soient paralleles, ou s'entrecouppent à angles droits, le plus qu'il est possible; & ie ne considere point d'autres Theoremes, sinon que les costez des triangles semblables ont semblable proportion entr'eux, & que, dans les triangles rectangles, le quarré de la base est égal aux deux quarrez des costez. Et ie ne crains point de supposer plusieurs quantitez inconnuës, pour reduire la question à tels termes, qu'elle ne depende que de ces deux Theoremes; au contraire, i'aime mieux en supposer plus que moins. Car, par ce moyen, ie voy plus clairement tout ce que ie fais, & en les demeslant ie trouve mieux les plus courts chemins; & m'exempte de multiplications superfluës; au lieu que, si l'on tire d'autres lignes, & qu'on se serve d'autres Theoremes, bien qu'il puisse arriver, par hazard, que le chemin qu'on trouvera soit plus court que le mien, toutesfois il arrive quasi toujours le contraire. Et on ne voit point si bien ce qu'on fait, si ce n'est qu'on ait la demonstration du Theoreme dont on se sert fort presente en l'esprit; & en ce cas on trouve, quasi toujours, qu'il depend de la consideration de quelques triangles, qui sont ou rectangles, ou semblables entr'aux, & ainsi on retombe dans le chemin que ie tiens. Carta de Descartes a Elisabeth de novembro de 1643* (AT, IV, 38). Convém observar que Kenneth Manders identifica na geometria de Descartes quatro marcas da introdução da álgebra, a saber: a igualdade, a adição de segmentos, proporcionalidades a partir de similaridades e o teorema pitagórico, que, ainda segundo ele, haviam sido anunciadas previamente nas *Regras* (AT, X, 381-2), onde, precisamente na regra VI, Descartes enumera alguns elementos contidos nas questões (*questiones*), a exemplo do igual, do semelhante e do reto. Cf. MANDERS, não publicado, p.14.

correspondência que podemos identificar a autoria das provas. Sem os trechos que veremos abaixo, seria impossível identificar a participação de Mydorge em uma das provas, por exemplo. E sequer saberíamos a opinião de Descartes acerca delas. Passemos então às cartas. Em uma carta de 4 de novembro de 1630, Descartes reportou a Mersenne o seguinte:

> Não conseguiria imaginar que nisso que me mandastes da duplicação do cubo pudesse haver algo em que se perder meia hora. Pois, se se quer demonstrar pelos sólidos, a coisa é possível, como vós sabeis que eu mostrei outrora a construção ao Sr. Hardy e ao Sr. Mydorge, a qual o Sr. *Mydorge demonstrou muito bem*; *mas, se se pensa encontrar doutra maneira, é certo que se erra*. (GRIFO NOSSO)[12]

Aqui, Descartes não só se refere de modo elogioso à demonstração de Mydorge, como também estabelece a unicidade da prova, uma vez que é, em seu entender, a única maneira possível de provar a inserção de duas médias proporcionais.

Tanto nessa carta como em outra de 10 de maio de 1632, há uma referência ao polímata Claude Hardy, o qual, conquanto estivesse envolvido no desafio elaborado por Descartes de demonstrar a duplicação do cubo a partir de uma parábola e de um círculo em 1625, não foi bem sucedido em sua tentativa. Entretanto, tão logo houvera passado o desafio, Hardy publicou um livro (*Examen de la duplication du cube, et quadrature du cercle*, de 1630) em que provava a falsidade de algumas demonstrações (incluindo uma da duplicação do cubo do matemático Paul Yvon[13]). Yvon, por sua vez, houvera, já em 1619, apresentado uma pseudodemonstração da duplicação do cubo no livro *Quadrature du cercle*. Um tempo após a publicação deste livro, em 1628, Yvon chegou a anunciar sua demonstração através de cartazes nas ruas, e submeteu-se ele mesmo à avaliação de outros matemáticos, tais como Mydorge e Hardy. Apesar do alarde de Yvon ter alcançado a simpatia de figuras ilustres da época (professores e até o rei Luís XIII), Mydorge na ocasião apontou-lhe o erro, eclipsando assim a fama de Yvon.

Na carta de maio de 1632, Descartes menciona novamente seus amigos de Paris, Mydorge e Hardy. Ei-la, pois:

> A mim havia sido fácil ver a duplicação do cubo dos Senhores M[ydorge] e H[ardy] com os livros que vós me enviastes, e me parece que vós me havíeis dito que ela estaria neles; mas neles eu não a encontrei.[14]

Descartes, que não nutria o mesmo afeto por seu inimigo Roberval, em outra carta de junho de 1632, depois de ter recebido a demonstração desse geômetra, aparenta indiferença

---

12 No original: *Je ne me sçavrois imaginer qu'en ce que vous me mandez de la duplication du cube, il puisse y avoir de quoy s'arrester une demie heure. Car si on la veut demonstrer par les solides, la chose est possible, comme vous sçavez que j'em ay autresfois fait voir la construction à M. Hardy & à M. Mydorge, laquelle M. Mydorge a fort bien demonstrée; mais si on la pense trouver autrement, il est certain qu'on se méprend. Carta de Descartes a Mersenne de 4 de novembro de 1630* (AT, I, 175).

13 Eis o pouco que sabemos a respeito de sua vida: Paul Yvon, Sieur de la Leu, (15?-1646), nascido em Touraine, foi um matemático que fez fortuna com o trabalho de comerciante armador. Em 1592, comprou a senhoria de Laleu, tendo construído um castelo por lá. Foi também vereador em La Rochelle e depois prefeito na mesma cidade. Em 1633, decidiu viver em Paris, onde acabou se convertendo ao protestantismo.

14 No original: *I'eusse esté bien aise de voir la duplication du cube de Messieurs M(ydorge) & H(ardy) avec les livres que vous m'avez envoyez, & il me semble que vous m'aviez mandé qu'elle y seroit; mais je ne l'y ay point trouvée. Carta de Descartes a Mersenne de 10 de maio de 1632* (AT, I, 252).

e salienta o fato de a demonstração nunca lhe ter parecido difícil, como observou Shea[15]. Leiamo-la:

> Eu não vos agradeci na minha última [carta] pela demonstração das duas médias proporcionais que vós me havíeis enviado; mas eu ainda não havia recebido vossa carta e eu vos direi que o Sr. Mydorge encontrou também a demonstração, no momento em que vós me fizestes fazer a construção dela, e que *nunca julguei que fosse difícil*. *Eu teria preferido que vós tivésseis proposto a construção de modo a dividir o ângulo em três*, a qual, se eu não me engano, eu vos dei ao mesmo tempo que a outra; *pois ela é um pouco menos fácil, e o Sr. Mydorge me confessou que não ter conseguido demonstrá*-la. (GRIFO NOSSO)[16]

O relato de Mersenne

Há ainda os comentários tecidos por Mersenne, que devem ser levados em consideração, a fim de se extrair maiores detalhes do contexto. Em nenhuma passagem dos livros de Mersenne, o nome de Descartes é citado, não lhe atribuindo explicitamente a autoria da construção que foi publicada. O que é certo é que Mersenne não poupa elogios ao autor da construção, seja na versão latina, ao chamá-lo de "grande homem"[17], seja na versão francesa, em que é "um homem de condição e de mérito, que por seu raro espírito é um dos maiores ornamentos da nossa França"[18]. Seja como for, essa maneira tão elogiosa de referir-se a esse matemático misterioso é já um forte indício de que se tratasse de seu estimado amigo Descartes. Mas não só isso, a correspondência de Descartes (analisada acima) também aponta para a sua inegável autoria. O "grande homem" – digo, Descartes – propõe a resolução do problema da duplicação do cubo a partir da intersecção de uma parábola e de um círculo – isso que é meramente observado na versão latina é na versão francesa acompanhado de uma longa explicação e um histórico do problema em que são citados matemáticos que forneceram demonstrações ao problema das duas médias proporcionais ora por "lugares sólidos", ora por "lugares lineares", ou ainda por "movimentos envolvidos" e, finalmente, "por descrições de círculos à sorte"[19].

É na versão francesa também que se encontra a observação de Mersenne de que essa construção (isto é, a construção proposta por Descartes) seja a mais simples de todas, pois envolve apenas uma parábola e um círculo. Em um primeiro momento, diz Mersenne: "Essa construção é, a meu ver, a mais simples de todas aquelas que foram encontradas até agora para a solução desse problema, do qual depende a tão célebre duplicação do cubo, e que foi

15 Cf. SHEA, 1993, p. 86.

16 Segue a versão original: *Je ne vous avois point remercié, em ma derniere, de la demonstration des deux moyennes proportionelles que vous m'avez envoyée; mais je n'avois pas encore receu vos lettres, & je vous diray que M. Mydorge em trouva aussi la demonstration, dés lors que vous m'en fistes faire la construction, & que je ne l'ay jamais jugée estre difficile. J'aimerois mieux que vous eussiez proposé la constuctions de la façon de diviser l'angle em trois, laquelle, si je ne me trompe, je vous donné em mesme temps que l'autre; car elle est un peu moins aisée, & M. Mydorge me confessa qu'il ne l'avoit peu demonstrer. Carta de Descartes a Mersenne de julho de 1632* (AT, I, 256, l. 4-15).

17 No original: *vir summus*. Cf. MERSENNE, 1636, p. 146.

18 No original: *un homme de condition & de merite, qui pour son rare esprit est l'un des plus grand ornemens de nostre France*. *Adições* (AT, X, 654-655) ou cf. MERSENNE, 1637, p. 409.

19 Cf. *Adições* (AT, X, 654). Embora Mersenne não tivesse notícia, Crippa mostra que, antes mesmo das demonstrações do século XVII, já havia uma solução efetiva para a construção de duas médias proporcionais de um matemático andaluz do século X. Cf. CRIPPA, 2014, p. 181.

tão investigada pelos geômetras antigos e modernos [...]"[20]. E depois da consideração acerca do desenvolvimento histórico do problema, insiste ele: "Mas eu estimo ainda mais aquela que segue, a qual se faz por meio somente de uma parábola, de um círculo e de uma linha reta [...]", que fora pensada por Descartes[21].

Dito isso, é importante notar que o comentário feito por Shea de que Mersenne teria preferido a construção de Roberval por ser a mais fácil é absolutamente falso[22]. Shea considera a construção na versão latina, que é de Descartes, como diferente da versão francesa, que ele pensou ser de Roberval, mas que é na verdade uma variação do mesmo diagrama da versão latina, adaptado à demonstração de Roberval. Com efeito, a construção da intersecção de uma parábola e de um círculo (construção à qual se refere Mersenne elogiosamente) foi pensada por Descartes, o qual esperava ainda a demonstração, como se vê logo abaixo: "sua demonstração e muito mais esperaremos do seu inventor"[23]. Em resumo, Descartes deu-lhe a construção, mas a demonstração, a ser elaborada a partir do diagrama, coube a Roberval. A construção de Descartes, contudo, acompanha um comentário, que transcrevemos a seguir:

> Seja, então, a linha M o lábio do sino, cuja metade é N, e entre as quais sejam encontradas duas médias com essa razão. Seja descrita a parte DA da parábola, cujo vértice A dista do foco O a quarta parte de uma das linhas dadas, a saber: da linha M. Em seguida, fique tomado o ponto B no eixo da parábola, que dista de A metade da linha M, e do ponto B seja alteada em ângulos retos BC igual à metade de N. Por último, seja descrito o círculo por A, que corte a parábola em D, e fique traçada da secção do ponto D uma perpendicular ao eixo AE, da qual DI será a maior das médias, enquanto IA será a menor: *cuja demonstração e muito mais esperaremos de seu inventor*. (GRIFO NOSSO)[24]

Na visão de Shea, Descartes temia que Mydorge, Mersenne e Roberval achassem o procedimento simples demais e teria tentado esconder que era o *latus rectum* ao dizer que é igual a *AO* em vez *1/4m* de *1/2n*.

Curiosamente, apesar de ter escrito uma breve demonstração, se é que assim podemos chamá-la, Descartes não a reconhece enquanto tal, pois diz estar à espera justamente de uma demonstração. Talvez seja por isso que Mersenne diga que Descartes teria um um "meio" de resolução, sem anunciar todavia que ele teria a demonstração. Quanto a Roberval, devemos-lhe a demonstração. E o processo desse matemático na descoberta da demonstração Mersenne narra da seguinte maneira:

---

20 Segue a versão original: *Cette construction est, à mon avis, la plus simple de toutes celles qui ont esté inventées jusques à maintenant pour la solution de ce Probleme, duquel depend la duplication du Cube si celebre, & qui a tant esté recherchée par les Geometres Anciens & Modernes [...]. Adições* (AT, X, 653).

21 *Adições* (AT, X, 653). Segue a versão original: *Mais j'estime encore davantage celle qui suit, laquelle se fait par le moyen d'une seule parabole, du cercle, & de la ligne droite [...].*

22 Cf. SHEA, 1993, p. 85.

23 No original: *[...] cuius demonstrationem ab illius inventore cum aliis pluribus expectabimus*. Cf. MERSENNE, 1636, p. 147.

24 No texto original: *Sit igitur labrum campanae linea M, cuius dimidium N, quas inter hac ratione duae mediae reperientur. Parabolae pars DA describatur, cuius vertex A distet à foco O quarta parte unius ex lineis datis, verbi gratiâ lineae M, deinde assumatur in axe parabolae punctum B distans ab A dimidio lineae M, & ex puncto B educatur ad angulos rectos BC aequalis dimidio N: denique ex centro C per A ducatur circulus, qui secet parabolam in D, & ex D puncto sectionis ducatur perpendicularis ad axem AE quae maior DI erit ex mediis, EA verò minor: cuius demonstrationem ab illius inventore cum aliis pluribus expectabimus*. Cf. MERSENNE, 1636, p. 146-147. Deve-se observar que, no texto original, há um erro: EA deve ser lido como IA. Shea corrige em sua tradução, e aqui também corrijo, mas somente na tradução, preservando o erro na transcrição original. Cf. SHEA, 1993, p.84.

> No entanto, quando Gilles de Roberval, Professor [da Cátedra Petrus] Ramus das Ciências Matemáticas no Collège Royal de France examinou essa construção, primeiramente observou bem a simples construção do difícil problema de acordo com seu gênero; em seguida, enquanto examinava ao mesmo tempo atentamente a mesma, elaborou de pronto uma demonstração dela, a qual eu inseri, aproveitando a ocasião, nesta página.[25]

Na versão francesa, Mersenne diz que Descartes (obviamente sem mencioná-lo nominalmente) forneceu-lhe apenas a construção, mas que a demonstração (que a Roberval pertence) pode ser encontrada facilmente. Ou seja, a construção que aparece na versão francesa, Roberval a atribui a Descartes, diferentemente do que diz Shea. Eis o comentário: "É verdade que ele [Descartes] nos deu tão-somente a construção; mas não foi difícil encontrar a demonstração, que são ambas como se segue"[26].

Se compararmos os dois diagramas (o da versão latina e o da versão francesa), observaremos uma ligeira diferença. E isso ocorre porque o diagrama da versão francesa aparece adaptado aos passos demonstrativos de Roberval. Porém, já na versão latina, Mersenne sugere ao leitor a inserção de algumas retas, dando-lhe comandos de construção, a fim de facilitar a demonstração. Eis o comentário de Mersenne: "Uma vez que a figura fora elaborada para a mera construção, nela faltam algumas linhas para a demonstração, as quais o benigno leitor completará"[27].

Comentário às demonstrações: universalidade, brevidade e acima de tudo beleza

Pelos motivos apresentados acima, é possível destacar duas características da prova de Roberval que não devem de todo ter agradado a Descartes e que apontam duas características do seu modo de proceder nas demonstrações. A primeira delas, e que parece ser a mais problemática, consiste no fato de a demonstração ser um caso especial de duas médias proporcionais. E, por isso mesmo, pode-se dizer que há uma deficiência na generalidade da prova. O próprio Mersenne indica que, para a demonstração ser universal, é necessário que os casos sejam somados: "Em seguida para que a demonstração seja universal, três são os casos".[28] No primeiro caso, por exemplo, as duas retas (m, que é o *latus rectum*, e n) não podem ter valores arbitrários, uma vez que n é igual a $2m$; ou ainda, como se vê no segundo caso, n é igual a $8m$. A demonstração de Mydorge, em contrapartida, pode ter valores arbitrários para ambos os lados, contanto que sejam desiguais, isto é: que um deles seja maior do que o outro[29].

---

25 Segue a versão original: *Hanc autem constructionem cum Aegidius de Roberval Mathematicarum scientiarum in Collegio Regio Franciae Professor Rameus inspexisset, primum quidem problematis ardui compositionem in suo genere sane simplicem miratus est; deinde cum ipsam tantisper attente speculatus esset, demonstrationem illius ex tempore adinvenit, quam ego, arrepta occasione, huic paginae inservi.* Cf. MERSENNE, 1636, p. 147.

26 Segue a versão original: *Il est vray qu'il ne nous em a donné que la construction; mais il n'a pas esté difficile d'em trouver la demonstration, l'une & l'autre desquelles est comme s'ensuit. Adições* (AT, X, 653).

27 Segue a versão original: *Quia vero figura ad constructionem nudam elaborata fuerat, desunt illi ad demonstrationem quaedam lineae, quas suppeblit benignus Lector.* Cf MERSENNE, 1636, p. 147.

28 No original: *Deinde ut demonstratio sit universalis, tres sunt casus [...].* Cf. MERSENNE, 1636, p. 147.

29 Eis por que Sasaki faz o seguinte comentário: "A solução de Mydorge era geral no sentido em que as duas linhas dadas eram arbitrárias". Cf. SASAKI, 2003, p. 171.

A segunda delas tem a ver com certas exigências adotadas por Roberval acerca da configuração do próprio diagrama. O fato de a parábola cortar a reta EH e o ponto D da circunferência, isto é, um critério de invariabilidade do diagrama, é na verdade um empecilho à prova, pois motiva uma multiplicação de casos (ou "*case-branching*"). Ao considerarmos a prova de Roberval, vemos que surgem um segundo e um terceiro casos: "no segundo caso, quando a perpendicular CF cai sobre o ponto D" e "no terceiro caso, quando a perpendicular CF cai sobre ID prolongada além de D"[30]. Na prova de Mydorge, o qual se vale da semelhança de triângulos, além de haver um resultado geral, não há a necessidade de se somar resultados singulares com o objetivo de se obter a generalidade da prova. A deformação diagramática é patente quando se observa o comentário de Mersenne (citado acima) que apela à benignidade do leitor, e sugere a descrição de novas retas: "São, então, as retas de C a A, C a D, de E, perpendicular à reta AE, e de C, perpendicular à reta ID, que é CF"[31]. Quando fixamos o olhar no diagrama com suas respectivas alterações, e, ato contínuo, observamos o diagrama, reelaborado por Mersenne para a edição francesa, notamos uma clara deformação do diagrama, que não significa de modo algum uma invalidação das informações contidas na figura e que não traz consigo nenhum impedimento ou falha na demonstração. O mesmo não se pode dizer da demonstração de Mydorge-Descartes, que depende impreterivelmente de uma configuração sem deformidades. Dessa maneira, podemos dizer que a configuração da construção de Roberval implica em uma multiplicação de casos, que acaba por aumentar a extensão da prova. Notamos, portanto, que esses dois aspectos (distintos mas conectados entre si) da prova de Roberval podem não ter agradado Descartes, além de serem um contraexemplo do modo de proceder nas demonstrações de Descartes.

É certo, Descartes manifestava uma preferência pela generalidade das provas e rejeitava a multiplicação de casos, tendo preferido assim sempre provas mais curtas. E isso a tal ponto que chegou a sugerir que as provas longas e a não generalidade das provas são consequências da prática de alguns matemáticos (aos quais chamou "pequenos Geômetras"), justamente porque aplicavam, segundo ele, teoremas euclidianos na resolução de problemas que lhes eram apresentados. Vejamos o que diz Descartes em uma carta a Elisabeth:

> Pois me parece que *o dispensável, que consiste em procurar a construção e a demonstração pelas demonstrações de Euclides, escondendo o procedimento da Álgebra, não é senão um divertimento para os pequenos Geômetras, que não requer muito do espírito nem da ciência.* Mas se há alguma questão que se quer solucionar, para se elaborar um Teorema que serve de *regra geral* para resolver muitos outros parecidos, é necessário reter ao fim todas as mesmas letras que foram postas no começo; ou bem, se se troca algumas para facilitar o cálculo, é preciso colocá-las em seguida, estando ao fim, porque ordinariamente muitos se apagam uma contra a outra, o que não se pode ver quando são trocadas.
>
> É bom, portanto, também observar que *as quantidades que se denominam por letras*, tendo uma relação semelhante uma com as outras, o quanto possível; *isso torna os Teoremas mais belos e mais curtos*, porque o que se enuncia de uma dessas quantidades enuncia-se do mesmo modo das outras, *e impede que se possa falhar no cálculo*, porque as letras, significando as quantidades que têm a mesma relação, devem se encontrar distribuídas do mesmo modo, e quando se falta isso, *reconhece-se seu erro*. (GRIFO NOSSO)[32]

30 Cf. MERSENNE, 1636, p. 148.

31 No original: *Sunt autem illae rectae ex C in A, ex C in D, ex E perpendicularis ad rectam AE, atque ex C perpendicularis ad rectam ID, quae sit*, Cf. MERSENNE, 1636, p. 147.

32 Segue a versão original: *Car il me semble que le surplus, qui consiste à chercher la construction & la demonstration par les propositions d'Euclide, en cachant le proceder de l'Algebre, n'est qu'un amusement pour les petits Geometres, qui ne requiert pas beaucoup d'esprit ny de science. Mais lors qu'on a quelque question*

É verdade que, no momento em que escrevia a carta a Elisabeth, Descartes já dispunha de métodos algébricos. Porém, há algumas observações nesse trecho que se destacam e que podem esclarecer as preferências demonstrativas de Descartes na época das discussões do problema das duas médias proporcionais. Em primeiro lugar, vemos um desprezo pela prática que visa conciliar a resolução de um dado problema matemático com os teoremas da geometria euclidiana. Tal procedimento é então contrastado com outra prática matemática que busca a transformação dos elementos do problema geométrico em letras, e, em seguida, em equações algébricas. Ou seja: o próprio método algébrico. Com efeito, a simbolização algébrica tem três consequências: a elaboração de "regras gerais" (o que significa a descoberta de resoluções mais gerais ou universais), provas mais curtas e certa facilidade na identificação de algum erro. Não menos importante, há uma dimensão estética da prova, pois as provas algébricas seriam curiosamente mais belas. O impedimento da multiplicação de casos graças à tradução do problema geométrico em uma formulação algébrica encontra-se em outra carta a Elisabeth, já citada, e onde ele mostra uma preferência pelos "caminhos mais curtos", livrando-se das tais "multiplicações supérfluas", que podemos ilustrar com a multiplicação de casos da prova de Roberval de duas médias proporcionais[33].

qu'on veut achever, pour en faire un Theoreme qui serve de regle generale pour en soudre plusieurs autres semblables, il est besoin de retenir iusques à la fin toutes les mesmes lettres qu'on a posées au commencement; ou bien, si on en change qualques-unes pous faciliter le calcul, il les faut remettre par apres, estant à la fin, à cause qu'on ordinairement plusieurs s'effacent l'une contre l'autre, ce qui ne se peut voir, lors qu'on les a changées. Il est bon aussi alors d'observer que les quantitez, qu'on on denomme par les lettres, ayent semblable rapport les unes aux autres, le plus qu'il est possible ; cela rend le Theoreme plus beau & plus court, pour ce que ce qui s'enonce de l'une de ces quantitez, s'enonce en même façon des autres, & empesche qu'on ne puisse faillir au calcul, pour ce que les lettres qui signifient des quantitez qui ont mesme rapport, s'y doivent trouver distribuées en mesme façon ; & quand cela manque, on reconnoist son erreur. Carta de Descartes a Elisabeth de novembro de 1643 (AT, IV, 47).

33 Cf. a já citada *Carta de Descartes a Elisabeth de novembro de 1643* (AT, IV, 38).

ANALYTICA
REVISTA DE FILOSOFIA
volume 26
número 1
2022

DEMONSTRAÇÃO DE ROBERVAL (PUBLICADA EM 1636 NO HARMONICORUM INSTRUMENTORUM DE MERSENNE)

PROPOSIÇÃO II[34]

Explicar o diapasão dos sineiros, com o qual são marcadas e definidas tanto as magnitudes como as medidas do sino, e determinar um meio de se encontrar as duas médias proporcionais.

O diapasão comum de nossos sineiros, que é chamado de *brochette*[35], apresento-o aqui, a fim de que o diapasão perfeito, que exibo aqui, fique no lugar do imperfeito. Com efeito, eles produzem todos os tons menores, ou dez nonos, quando o menor deve suceder o

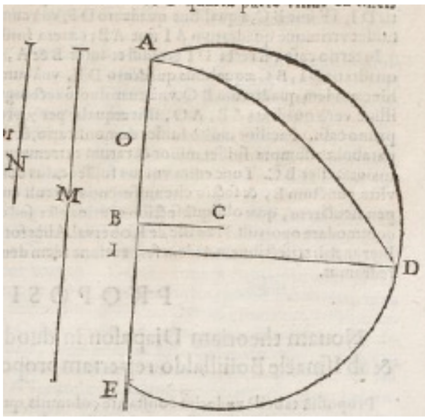
34 Tradução da proposição II, livro IV, *De Campanis* (*Dos sinos*), da obra de Marin Mersenne *Harmonicorum instrumentorum Libri IV in quibus fuse satis agitur de monochordis variisque citharis, barbitis, lipis, tubis, clavichordiis, fistulis, tibiis, serpente, cornubus, organis, campanis, cymbalis atque tympanis*, Paris, 1636, pp. 146-148. Também está reproduzida parcialmente (sem a demonstração de Roberval) na carta nº 34 de René Descartes (em Paris) a Mersenne (em Paris) no verão de 1635 da *Correspondance du P. Marin Mersenne religieux Minime, Vol. I, 1617-1627*, (ed.) Cornelis de Waard, Paul Tannery, A. Beaulieu, et *alii*, Paris: CNRS Éditions, 1945, pp. 256-259. Quanto ao texto dessa última edição, segue a tradução do comentário que a acompanha: "*Em uma carta de agosto de 1625 (nº 35) Cornier pede a Mersenne informações sobre o problema a que se refere a demonstração reproduzida abaixo. Como não é mais questão na correspondência ulterior, parece que se trata do verão de 1625 – época na qual Descartes, como vimos, encontrava-se em Paris – que data essa proposição. Ao seu amigo matemático, Mersenne* não havia somente proposto o problema da duplicação do cubo, mas também o da trissecção do ângulo (cf. as cartas de Descartes de 4 de novembro de 1630 e do final de junho de 1632). Havendo uma dúvida sobre a autenticidade de nosso texto, nós o reproduziremos senão em pequenos caracteres. [...] O problema que consiste em encontrar o comprimento que deve ser a lateral do novo cubo corresponde à construção da raiz da equação $x^3=2a^3$, ou à construção de duas médias proporcionais entre as retas a e $2a$; no caso mais geral, em que as duas retas dadas são a e b, a equação se torna $x^3=a^2b$. Reconhecendo que o problema não era plano (isto é: que a régua e o compasso não são suficientes para isso) vários geômetras da Antiguidade consideravam-no como linear e introduziam para resolvê-lo novas linhas mais ou menos complicadas; como observamos (p. 206), apenas Menêcmo havia tratado o problema como sólido: ele o resolvera pelas seções cônicas. Outras soluções, mais ou menos adequadas, frequentemente acompanhadas por aproximações, foram propostas em seguida por Ramus, Oronce Finé, Buteo, Stifelius, Cardano e Scaliger; o Padre Grienberger, a quem se deve a parte matemática da obra impressa sob os nomes dos Reverendos Padres Prado e Villalpando, introduziu uma nova curva e o Padre Clavius resumiu os métodos conhecidos. Quando Viète havia demonstrado que a solução de cada equação cúbica ou biquadrática corresponde a uma duplicação do cubo ou a uma trissecção do ângulo, o problema ganhou mais interesse. Descartes, que havia se ocupado com equações cúbicas desde o começo de 1619, havia então construído, a exemplo do mesolábio de Eratóstenes, um compasso para encontrar entre duas retas duas e até mesmo n médias proporcionais, e aparentemente, ele comunicara a Faulhaber, em setembro ou outubro de 1619, sua elegante solução dos problemas sólidos de 3º e 4º graus pela parábola e o círculo. Mersenne também falara do problema em sua *Impiété des Déistes* (I, p. 71); e em sua *Vérité des Sciences*, ele desejava matemáticos capazes de impor "um silêncio eterno à quantidade de ignorantes que querem persuadir através de seus sofismas, & paralogismos, de que eles encontraram a quadradura do círculo, a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo..." (*Op. cit.*, p. 750). A descoberta de Descartes, superior à antiga solução na medida em que ela recorria tão-somente a uma parábola e a um círculo, devia seu lustre às concepções da época que exigiam para a solução de um problema geométrico a via mais simples, seja pelo número, seja pela natureza das curvas envolvidas. É isso que Mersenne dá a entender, quando na sua *Harmonie universelle*, *t. II* (1637), *Livre VI*, *des orgues*, pp. 407 sqq., ele insere a construção de Descartes, em uma redação que ele declara posterior à redação latina, a qual é mais concisa, e parece mais conforme ao original. Descartes, que declarava na sua *Géométrie* de 1637, que, quanto às soluções que não são tão simples quanto possíveis, "seria um erro de geometria empregá-los" (p. 371), daria em seguida (pp. 395-397) sua solução combinada de dois problemas, sem que apareça, aqui ou acolá, sob que forma ele havia inicialmente proposto a construção do problema da trissecção do ângulo, comunicada a Mersenne ao mesmo tempo em que a outra. Para uma demonstração da construção do problema das duas médias proporcionais, ver o documento nº 36."

35 Literalmente "espeto" em francês.

maior, a não ser que eles prefiram todos iguais, das quais falaremos posteriormente. Desse modo, a linha seguinte AB mostra a verdadeira regra harmônica, a qual permite que sejam inseridas tão-somente nos sinos trinta partes e que sejam compostas até cem continuamente com a mesma corda. Mas quando os fundidores substituem o menor sino de todos, do qual A1 seja a espessura do lábio, e que o nível 25 pese cinco libras, o peso do sino cujo lábio é A2 será igual ao peso do precedente em uma razão tripla de A1 a A2, e assim quanto ao restante. Por exemplo, porque a espessura do lábio A8 é o dobro da espessura do lábio A1, e faz com ela uma oitava, de todas as maneiras, a razão tripla 2 a 1 faz 8 a 1, o peso do sino A8 será o óctuplo do sino A1. E essas coisas são tão claras pelos livros precedentes que não requerem nenhuma explicação, porém serão tratadas amplamente a seguir.

No entanto, a elas convém acrescentar um modo pelo qual um grande homem encontrou as duas médias proporcionais com a ajuda de uma única parábola, com as quais os fundidores poderão usar, e para que observem não somente a igualdade dos semitons como dos tons entre os sinos, mas também nas violas, nas liras e em outros instrumentos de corda.

Seja, então, a linha M o lábio do sino, cuja metade é N, e entre as quais sejam encontradas duas médias com essa razão. Seja descrita a parte DA da parábola, cujo vértice A dista do foco O a quarta parte de uma das linhas dadas, a saber: da linha M. Em seguida, fique tomado o ponto B no eixo da parábola, que dista de A metade da linha M, e do ponto B seja alteada em ângulos retos BC igual à metade de N. Por último, seja descrito o círculo por A, que corte a parábola em D, e fique traçada da secção do ponto D uma perpendicular ao eixo AE, da qual DI será a maior das médias, enquanto IA será a menor. Sua demonstração e muito mais esperaremos de seu inventor[36].



Ora, tendo encontrado essas linhas, outras nove proporcionais serão descobertas desse modo pela proposição VI.13 de Euclides[37], por meio da qual encontramos a proposição 10, do livro 1; às quais se adicione o número 15, e a proposição 31, que exibe mais precisamente onze médias proporcionais e divide o diapasão em doze semitons iguais. No entanto, quando Gilles de Roberval, Professor [da Cátedra Petrus] Ramus das Ciências Matemáticas no Collège Royal de France examinou essa construção, primeiramente observou bem a simples construção do difícil problema de acordo com seu gênero; em seguida, enquanto

36 Cumpre observar que o texto original latino apresenta pequenos erros justamente nesse parágrafo: DA foi erroneamente trocado por BA, AE por DE, IA por EA e se repetia desnecessariamente DI. Em nossa tradução, no entanto, fizemos a devida correção.

37 A proposição euclidiana VI.13 demonstra como encontrar uma média proporcional entre duas retas dadas.

examinava ao mesmo tempo atentamente a mesma, elaborou de pronto uma demonstração dela, a qual eu inseri, aproveitando a ocasião, nesta página.

Porque a figura fora elaborada para a mera construção, nela faltam algumas linhas para a demonstração, as quais o benigno leitor completará. São, então, as retas de C a A, C a D, de E perpendicular à reta AE e de C perpendicular à reta ID, que é CF. Para que a demonstração seja então universal, três são os casos: o primeiro é quando a reta DI cai entre B e E; o segundo é quando a mesma DI cai em B; e a terceira quando a mesma DI cai entre B e A. Mas, tendo-se compreendido o primeiro caso, os dois restantes não serão difíceis. Do mesmo modo, qualquer que seja em nosso exemplo entre as extremidades M e N, das quais uma é o dobro da outra, fique proposto encontrar duas médias continuamente proporcionais, as mesmas M e N podem, no entanto, ser em qualquer razão entre si: fique posto então M maior que N em qualquer razão.

Agora, seja descrita a parábola AD, cujo vértice seja A, o eixo seja AE, e o *latus rectum* M, a maior das extremidades dadas; e também o segmento AB seja cortado igual à metade do *latus rectum* M, e fique alteada perpendicular ao eixo AE a reta BC, que é igual à metade da reta N da menor extremidade. Enquanto seja descrito o círculo com o centro C e com a distância CA, cuja circunferência com centro em C corta a parábola no ponto D, a partir do qual fique alteada DI perpendicular ao eixo AE (com efeito, a circunferência do círculo cortará a parábola, em relação ao qual o ângulo da parte do círculo em A é maior do que um reto, assim a parábola entre no círculo e depois sai). Digo que as retas M, DI, AI e N são continuamente proporcionais. Fique, então, tomada a reta AE igual ao *latus rectum* M, e assim a circunferência do círculo AD descrita com o centro em C e a distância em CA passará pelo ponto E. Agora, ou a reta DI cai entre os pontos E e B ou no ponto B ou entre B e A. A reta DI não pode cair no ponto E ou além: porque a reta que é alteada a partir de E perpendicular a AE até o círculo da circunferência é igual ao dobro da reta BC, isto é: igual à reta N, e, ademais, menor do que aquela que se liga do mesmo ponto E até a parábola, que ligada é igual ao *latus rectum* M, ou AE, pela natureza da parábola.) No primeiro caso, caia a reta DI entre os pontos E e B; com efeito, a figura está construída para esse caso; porém, para os casos restantes, a demonstração será, de fato, mudada muito pouco; e fiquem ligadas as duas retas CA e CD, e a reta CF perpendicular à reta DI, e essas três retas não estão na figura: portanto, a reta FI é igual à reta BC, porque CI é paralelogramo: e as retas CD e CA serão iguais por causa do círculo.

Depois, então, que a reta DI é cortada em F, pela proposição II.7 de Euclides os quadrados DI, IF, ou DI, BC, serão, de todo modo, iguais ao quadrado FD, com o dobro do retângulo DI, IF; mas o dobro do retângulo DI, IF, ou DI, BC, é igual ao retângulo DI em N, [que é] o dobro do mesmo BC: por essa razão, ambos os quadrados DI, BC são iguais ao quadrado FD com o retângulo DI, N. Do mesmo modo, nesse primeiro caso, pela proposição II.7 de Euclides os quadrados AI, AB são iguais ao quadrado BI, com o dobro do retângulo AI, BA. Sejam então adicionadas coisas iguais a coisas iguais, e os quadrados DI, BC, AB e AI são iguais aos quadrados FD, BI, com o retângulo DI, N, e ao dobro do retângulo AI, BA, ou ao retângulo AI, EA, porque o dobro de EA é o mesmo BA. Mas na primeira parte da igualdade os quadrados BC, AB são também iguais ao quadrado CA pela proposição I.47 de Euclides e na segunda parte da igualdade os quadrados FD e BI, ou CF são iguais ao quadrado CD pela mesma proposição. Ademais, os quadrados CA e CD são iguais; por isso, eliminados de um lado e do outro, restará na primeira parte o quadrado DI com o quadrado AI igual ao retângulo EA, AI com o retângulo DI, N, que restam na segunda parte. Mas o quadrado DI da ordenada até a parábola é igual ao retângulo contido pelo *latus* *rectum* EA em distância AI[38] pela proposição I.11 das Cônicas de Apolônio[39]. Desse modo, eliminadas coisas iguais, o quadrado AI é igual ao retângulo contido por DI e N. São então proporcionais DI, AI e N, mas são também proporcionais AE, ou o *latus rectum* M, a ordenada ID, e AI com distância entre o vértice e a ordenada, pela proposição I.11 das Cônicas de Apolônio. São então continuamente proporcionais M, ID, AI e N; as dadas extremidades são M e N, ao passo que as médias descobertas são ID, AI; o que era preciso fazer.

No segundo caso, se a reta DI tivesse caído em B, o ponto F teria caído em C. Sendo os quadrados DI, IF ou BC, iguais ao quadrado DF com o retângulo DI, N, como no primeiro caso; se for adicionado de um lado e do outro o quadrado AI ou AB; os passos seguintes serão fáceis.

No terceiro caso, se a reta DI tiver caído entre B e A, considere que o ponto I tenha caído em O; sendo os quadrados DI, BC iguais ao quadrado DF, com o retângulo DI, N, como acima; que sejam adicionados de um lado então o quadrado BO com o dobro do retângulo AO, AB, ou apenas com o retângulo EAO, e do outro lado os quadrados AB, AO, que são iguais pela proposição II.7 de Euclides. Os passos seguintes são como anteriormente no primeiro caso. A demonstração teria sido muito mais fácil, e a construção mais intuitiva, se aquela que foi tomada como *latus rectum* da parábola a ser descrita fosse a menor das extremidades dadas, cuja metade fosse AB, ao passo que a metade da maior fosse BC. Então, o caso da construção teria sido único, porque a reta DI teria caído necessariamente além do ponto E, e a secção da circunferência do círculo com a parábola aproxima-se mais à secção perpendicular, a qual é mais intuitiva do que a secção oblíqua; mas foi preciso acomodar nossa demonstração à figura preparada de antemão. Assim disse Roberval[40]. De outra vez, colocaremos talvez uma nova construção, pela qual se demonstrará igualmente a trissecção do ângulo com praticamente a mesma razão; mas agora voltemos à prática dos sineiros.

38 Ou seja, o retângulo EA, AI.

39 Na proposição I.11 d'*As Cônicas*, Apolônio apresenta a propriedade (*symptoma*) da parábola, que pode ser formulada algebricamente da seguinte maneira: $y^2=ax$. Essa proposição é mencionada apenas implicitamente na versão da edição francesa, por sinal.

40 No original: *Haec ille de Roberval*. A expressão latina "*haec ille de...*" indica o término da citação de um texto escrito por outrem.

DEMONSTRAÇÃO DE ROBERVAL (PUBLICADA EM 1637 NO HARMONIE UNIVERSELLE DE MERSENNE)[41]

ADVERTÊNCIA

Uma vez que me estendi demasiadamente sobre todas as dificuldades do órgão, e que tracei seu diapasão de tantas maneiras, das quais a que depende das onze médias proporcionais é uma das principais, eu quero aqui acrescentar um meio de encontrá-las geometricamente, pois depende de uma única parábola, e que foi encontrado por um dos mais excelentes espíritos do mundo, cuja modéstia é tão grande e tão extraordinária que ele não quer ser nomeado. Eu coloquei aqui somente a construção que ele me deu. Não fora senão o senhor de Roberval, excelentíssimo geômetra e professor de matemáticas no Collège Royal de France, que fez prontamente a demonstração, que já tive a ocasião de expor na segunda proposição do livro latino dos Sinos; mas ela estará melhor aqui, em razão da figura da qual me sirvo, a qual corresponde mais pontualmente ao discurso, o que não faz a do dito livro, à qual faltam algumas linhas. De modo que não terá aqui o que eu não quisera apresentar na sétima proposição do segundo livro dos Instrumentos[42], no qual eu explico diversas maneiras geométricas e mecânicas para encontrar onze, 23, etc. médias proporcionais entre duas [retas] dadas, para dividir a oitava em doze semitons e em vinte e quatro sustenidos, ou quartos de tom.

41 Tradução da proposição XLV, livro VI, *Des Orgues* (*Dos órgãos*), da obra de Marin de Mersenne *Harmonie universelle: contenant La Pratique des Consonances, & des Dissonances dans le Contrepoint figuré, La Methode d'enseigner, & d'apprendre à chanter. L'Embellissement des Airs. La Musique Accentuelle. La Rythmique, la Prosodie, & la Metrique Françoise. La maniere de chanter les Odes de Pindare, & d'Horace. L'Utilité de l'Harmonie, & plusieurs nouvelles Observations, tant Physiques que l'une des Propositions, & l'autre des Matieres*, Paris, 1637, pp. 407-412. Também se encontra reproduzida na edição Adam-Tannery das obras completas de René Descartes, em *Adições: Médias Proporcionais* (AT, X, 651-659). Segue o comentário acerca desse texto da edição Adam-Tannery: "O geômetra de Paris, do qual fala Beeckman, é sem dúvida Claude Mydorge. Ao menos, duas vezes, Descartes, em sua correspondência, lembra ao Pe. Mersenne, em relação à duplicação do cubo, que ele, Descartes, havia indicado outrora a construção desse problema, e que Mydorge forneceu a demonstração. Ver as cartas de 4 de nov. de 1630, t. I, p. 175, l. 3-9, e de junho de 1632, ibid., p. 256, l. 3-10. Sendo assim, talvez devêssemos retificar a dupla indicação dada, t. I, p. 252, l. 24-25, no final de uma carta de Descartes, de 10 de maio de 1632: 'duplicação do cubo dos Senhores M(ydorge) & H(ardy)'. O Pe. Mersenne não havia enviado a Descartes, em 1632, a demonstração de Mydorge, mas outra demonstração, que Descartes não conhecia ainda. E essa outra demonstração parece ser a de Roberval. Com efeito, o Pe. Mersenne, em suas duas publicações, latina e francesa, dos *Harmonicorum libri XII* e da *Harmonie Universelle*, em 1636, dá, por inteiro, uma demonstração de Roberval para o problema das médias proporcionais (do qual a duplicação do cubo não é senão um caso particular). Veja-se essa demonstração, feita a partir de uma construção dada pelo próprio Descartes, como o declara também o Pe. Mersenne." (AT, X, 651-652)

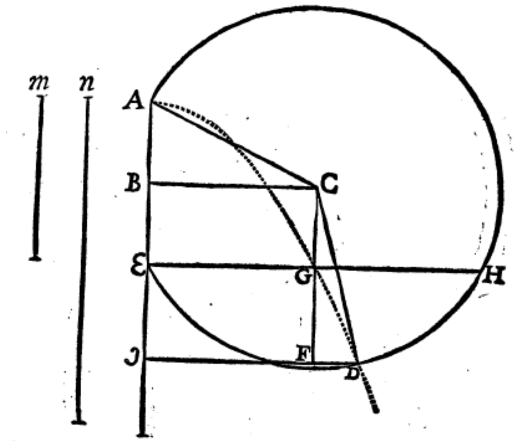
42 Proposição VII, livro II, *Des Instruments à chordes* (*Dos instrumentos de corda*) no mesmo *Harmonie universelle*, pp. 65-70: "Demonstrar que o tom maior, e menor, a Oitava, e todos os outros intervalos podem ser divididos em dois, ou mais partes iguais; daí se segue que se pode dividir a Oitava em 12 semitons iguais: em que se verá a maneira de encontrar uma, e dois médias proporcionais entre duas linhas dadas, de duplicar o cubo, e colocar as escalas no braço do Alaúde e de outros instrumentos."

PROPOSIÇÃO XLV

Entre duas linhas retas desiguais dadas, encontrar duas médias continuamente proporcionais, para dividir o diapasão dos órgãos em doze semitons iguais.

Essa construção é, a meu ver, a mais simples de todas aquelas que foram descobertas até agora para a solução desse problema, do qual depende a tão célebre duplicação do cubo, e que tanto foi buscada pelos geômetras antigos e modernos, de modo que, nos Comentários de Eutócio a Arquimedes, se encontram onze autores dos mais renomados entres os antigos, sem aqueles de nosso tempo, que apresentaram a demonstração, alguns pelos lugares sólidos, como Menêcmo; outros por lugares lineares, como Nicomedes, Díocles, e nosso Viète; e outros que envolvem movimentos, como Platão, Arquitas, Fílon de Bizâncio, Papo, e Esporo; ou por descrições de círculos à sorte, como Herão, e Apolônio – deixando a parte um grande número de outros, os quais, ao invés de demonstrações, não nos deram senão paralogismos. Porém, como os antigos, segundo o relato de Papo, estimaram que fosse um grande erro resolver por lugares sólidos ou lineares um problema que de sua natureza poderia ser resolvido apenas por lugares planos, eu estimo da mesma maneira que o erro não é menor se se resolve por lugares lineares ou envolvendo movimentos ou por descrições à sorte, um problema, que por sua natureza pode ser resolvido por lugares sólidos. Pois, uma vez que entre os lugares a ordem é tal, que aqueles que chamamos planos são os mais simples, a saber: linha reta, e a circunferência do círculo, a descrição das quais Euclides postula que seja aceita no início de seus Elementos. Depois deles, vêm os lugares sólidos, que têm sua origem na secção de uma superfície cônica, gerada por uma linha reta e pela circunferência de um círculo. Os lugares sólidos são: parábola, elipse, e hipérbole, que são seguidas pelos lugares que denominados lineares, gerados o mais das vezes por dois movimentos envolvidos, como as concóides, as espirais, quadratrizes e uma infinidade doutras, cuja descrição ordinariamente é quase impossível. Parece razoável que todo problema que pode ser resolvido por lugares planos seja resolvido por lugares planos, e que aquele que, não podendo ser resolvido apenas por lugares planos, pode sê-lo por lugares sólidos ou mesclados com lugares planos, deve ser resolvido apenas por lugares sólidos ou misturados com lugares planos. Enfim, quando um problema é de tal natureza que não pode ser resolvido por lugares planos ou sólidos, então é permitido resolvê-lo apenas por lugares lineares ou misturados com lugares planos e sólidos; de sorte que se sirva, todavia, o mais que se puder dos lugares planos, e o menos que se possa dos outros; e que uma construção na qual entrará somente um lugar sólido, sendo o resto plano, seja mais estimada do que aquela na qual entrarão dois lugares sólidos, pois, à imitação da natureza, nós devemos tudo fazer pelos meios mais simples.

Por essa consideração, na solução do problema que se apresenta, o qual não pôde ainda ser resolvido apenas por lugares planos, não posso aprovar outras construções de todos os antigos senão as de Menêcmo, que dá duas delas: uma por meio de uma parábola, de uma hipérbole e de uma linha reta e outra por meio de duas parábolas e da linha reta. Mas eu estimo mais a que segue, a qual se faz por meio de uma única parábola, do círculo e da linha reta, e foi inventada há pouco por um homem de condição e mérito, que por seu raro espírito é um dos maiores ornamentos da nossa França. É verdade que ele nos deu tão-somente a construção [da solução do problema], mas não foi difícil encontrar a demonstração, que são ambas como se segue.



Sejam duas linhas retas desiguais dadas, *m*, *n*, das quais *m* seja a menor, e que entre as duas se deva encontrar duas médias continuamente proporcionais. Sejam AE, EH, duas linhas retas perpendiculares uma à outra, das quais AE seja igual a *m*, e EH igual a *n*; e seja AE seccionada igualmente em duas no ponto B, do qual sobre AE seja traçada a perpendicular BC, bem como EH, e igual à metade da mesma EH; seja assim traçada a linha CA; e do centro C e do intervalo CA seja descrito um círculo, do qual a circunferência passará pelos pontos A, H, E – o que é fácil de demonstrar. Em seguida, assumindo a linha dada AE por posição do eixo de uma parábola, e o comprimento da mesma AE como *latus rectum*; seja descrita a parábola AGD, cortando a linha EH no ponto G, e a circunferência do círculo no ponto D. Porém, é evidente que a parábola corta a linha EH, perpendicular ao eixo AE; que ela corta, prova-se também, a circunferência do círculo entre os pontos E, H, na medida em que a linha EG, conforme a natureza da parábola,[43] é igual ao *latus rectum* AE, que é menor, por suposição, que EH; e o ponto G que está na parábola, e está no círculo; assim, a parábola passa no círculo entre os pontos E, H; e depois ela se estende infinitamente, sendo o círculo finito, ela sairá, e cortará a circunferência no ponto D entre E e H. Seja então, do ponto D sobre o eixo AE prolongado, alteada a perpendicular DI. Eu digo que DI e AI são as duas médias proporcionais que se pedem.

Seja, pois, traçada a linha CD, e CF perpendicular a ID, a CF cairá ou entre I, D, ou no ponto D, ou sobre ID prolongada além do ponto D. Que ela caia, então, entre I, D; pois, sendo esse caso demonstrado, os dois outros não terão nenhuma dificuldade. Depois, então, que DI é cortada em F, segue-se, pela sétima proposição do segundo livro de Euclides, que os dois quadrados DI, IF, ou DI, BC, são iguais ao quadrado DF e a duas vezes o retângulo DIF; mas duas vezes o retângulo DIF é igual ao retângulo contido por DI e *n*, porque *n* é o dobro de BC, igual a IF; então os dois quadrados DI, BC são iguais ao quadrado DF e ao retângulo contido por DI e *n*.[44] Similarmente, pela mesma sétima proposição do segundo livro de Euclides, os quadrados AI, AB são iguais ao quadrado BI ou CF, e a duas vezes o retângulo IAB, ou somente ao retângulo IAE; isto é, que os quadrados AI, AB, são iguais ao quadrado CF e ao retângulo IAE.[45] Sejam então adicionadas coisas iguais a coisas iguais, a saber: dois quadrados DI, BC, aos dois quadrados AI, AB; e o quadrado DF com seu

43 Roberval evoca a propriedade (*symptoma*) da parábola utilizada pelos geômetras antigos que, algebricamente, pode ser formulada da seguinte maneira: , sendo o *latus rectum*.

44 A partir da proposição euclidiana II.7, obtém-se: $DI^2+IF^2=DF^2+2(DI \times IF)$. E como $n=2 \times BC$ e $IF=BC$, logo $2(DI \times IF)=DI \times n$.

45 A partir da proposição euclidiana II.7, obtém-se: $AI^2+AB^2=BI^2+2(IA \times AB)$. E como $BI=CF$, logo $AI^2+AB^2=CF^2+2(IA \times AB)$. Mas, dado que $2AB=AE$, pode-se obter a equação: $AI^2+AB^2=CF^2+IA \times AB$.

retângulo contido por DI e *n*, ao quadrado CF e a seu retângulo IAE: desse modo, os quatro quadrados DI, BC, AI, e AB, serão iguais aos dois quadrados DF, CF, e aos dois retângulos, um dos quais é contido por DI e *n*, e o outro é IAE.[46] Mas dos quatro quadrados os dois CB, AB, são iguais ao CD somente; e AC é igual a CD, por causa do círculo;[47] sejam então eliminados esses quadrados iguais, AC, CD, e permanecerão os dois quadrados DI e AI, de um lado, iguais aos dois retângulos contidos por DI e *n*, e por IAC, de outro lado.[48] Mas o quadrado DI é igual ao retângulo IAE, por causa da parábola, da qual AE é *latus rectum*; sejam então eliminadas essas partes iguais, e permanecerá o único quadrado AI, igual ao único retângulo contido por DI e *n*. Portanto, a linha *n* está para AI, como AI está para ID; mas AI está para ID, como ID está para o *latus rectum* AE ou *m*, por causa da parábola: assim as linhas *n*, AI, ID, e *m* são continuamente proporcionais; e os extremos *n*, *m* estão dados; e nós achamos as médias AI, e ID, que é o que se pede.[49]

No segundo caso, quando a perpendicular CF cai sobre o ponto D, as linhas CF e CD coincidem, e a linha ID corta o círculo, e igual a BC; isso ocorre quando *n*, a maior das extremidades dadas, é o óctuplo em potência da menor extremidade *m*[50]. Portanto, o problema no mesmo caso é plano e as linhas são continuamente o dobro em potência uma da outra, isto é: como o diâmetro de um quadrado a seu lado; como aparece na demonstração seguinte, que é fácil. Pois, pela sétima proposição do segundo livro de Euclides, os quadrados AI, AB, são iguais ao quadrado BI, ou CF, ou CD, e a duas vezes o retângulo IAB, ou apenas ao retângulo IAE, ou ao quadrado ID, ou BC[51]; e adicionando em uma parte e na outra o quadrado BC, nós teremos os três quadrados AI, AB, e BC, iguais aos três CD, ID, e BC. Mas, dos três primeiros, os dois AB, BC, são iguais a apenas AC, igual a CD. Sejam então retirados de uma parte e de outra os quadrados AC, CD, e restará apenas o quadrado AI, igual aos dois ID, BC, os quais, sendo iguais nesse caso, o quadrado AI fará o dobro do quadrado ID, ou do quadrado de BC[52]; mas o dobro do quadrado de BC, ou ID, é igual ao retângulo contido por ID e *n*, para o qual *n* é o dobro de BC, ou ID[53]; então o quadrado de AI é igual ao retângulo contido por ID e *n*[54], de onde se segue que as três linhas *n*, AI, e ID, são proporcionais; e os três AI, ID e AE, ou *m*, sendo também proporcionais, por causa da parábola, os quatro *n*, AI, ID e *m* serão continuamente proporcionais – que é o que se pede. E depois que se provou que o quadrado de AI é o dobro do quadrado de ID, parece que as quatro linhas são continuamente o dobro uma da outra; e que *n* será o óctuplo em potência de *m*.

---

46 Algebricamente, isso pode ser lido da seguinte maneira: $DI^2+BC^2+AI^2+AB^2=DF^2+DI \times nCF^2+2IA \times AB$.

47 Sabe-se, pelo teorema de Pitágoras, que $AC^2 = AB^2+BC^2$ e que $CD^2 = DF^2+CF^2$. E, dado que AC e CD são iguais porque equivalem ao raio de um mesmo círculo, logo é sabido que $AB^2+BC^2 = DF^2+CF^2$.

48 Simplifica-se a equação a partir da observação feita na nota anterior e da aplicação do axioma I.3 de Euclides: $DI^2+AI^2 = DF^2+DI \times n + 2(IA \times AB)$, ou $DI^2+AI^2 = DF^2+DI \times n + IA \times AE$,simplesmente.

49 Aplica-se a propriedade da parábola envolvendo o *latus rectum* (AE), e se aplica o axioma I.3 de Euclides:$DI^2 = IA \times AE$. E, consequentemente, obtém-se a equação $AI^2 = DI \times n$. As duas equações podem ser escritas em uma relação de duas médias proporcionais da seguinte maneira: $\frac{m}{DI} = \frac{DI}{AI} = \frac{AI}{n}$

50 Isto é: $n = 8m$.

51 Pela proposição euclidiana II.7, temos: $AI^2+AB^2 = BI^2 + 2(IA \times AB)$. Uma vez que BI = CF = CD e que $2(IA \times AB) = (IA \times AE)$, então se pode escrever a equação do seguinte modo: $AI^2+AB^2 = CD^2+ID^2$.

52 Depois de adicionado em cada membro da equação BC^2, obtém-se: $AI^2+AB^2 + BC^2= CD^2+ID^2 + BC^2$. Porém, pelo teorema de Pitágoras, sabe-se que $AB^2 + BC^2 = AC^2$. E dado que AC = CD, então $AI^2+ID^2 + BC$. Simplifica-se a equação retirando de cada membro $AB^2 + BC^2$, obtendo assim: $AI^2+ID^2 + BC^2$. Como ID = BC, então: $AI^2 + 2ID^2$ ou $AI^2 = 2BC^2$.

53 $2BC^2 = ID \times n$, sendo que $n = 2 \times BC$ ou $n = 2 \times ID$.

54 Ou seja: $AI^2 = ID \times n$.

No terceiro caso, quando a perpendicular CF cai sobre ID prolongada além de D, é o que acontece quando a maior extremidade dada é maior que o óctuplo em potência da menor. A demonstração é inteiramente como no primeiro caso, sem mudar uma única letra nem uma só palavra, exceto que, dos dois pontos, onde a linha ID corta a circunferência do círculo, o ponto D é o mais próximo do ponto I, visto que no primeiro caso ele é o mais afastado do mesmo ponto I.

I. ADVERTÊNCIA

Cumpre observar que, quando as duas extremidades dadas estão em comprimento ou em potências, como número cubo[55] a número cubo, então o problema é plano, porque as linhas estão entre elas continuamente em comprimento ou em potência como os lados dos números cubos, os quais, sendo dados números e lados, sua razão é dada, e, portanto, a razão contínua das linhas é também dada; e assim, a primeira sendo dada, a segunda o será, e a terceira. Como as extremas dadas estão entre elas como 27 para 8, a primeira estará para a segunda como 3 para 2, ou como 27 para 18; e a segunda à terceira, bem como como 3 para 2, ou como 18 para 12. Do mesmo modo, se as extremidades estão entre elas como 8 para $\sqrt{q.\,27}$, a primeira estará para a segunda como 2 para $\sqrt{q.\,3}$, ou como 8 para $\sqrt{q.\,48}$; e, ademais, a segunda estará para a terceira, como 2 para $\sqrt{q.\,3}$, ou como $\sqrt{q.\,48}$ para 6, e da mesma maneira as outras.

Nós então encontramos entre duas linhas retas dadas, duas outras linhas retas continuamente proporcionais por meio de uma única parábola, do círculo e da linha reta. Nós temos também pelo mesmo meio a trissecção do ângulo; a secção da esfera por um plano em duas porções que tenham a razão dada, que é a quarta proposição do livro da Esfera e do Cilindro de Arquimedes[56]. E em uma palavra nós temos pelo mesmo meio a solução de todos os problemas que por sua natureza são sólidos, os quais em análise especiosa, por preparações apropriadas, se reduzem a uma dessas duas igualdades, A cubo igual a B sólido, ou B plano por A menos A cubo igual a Z sólido, dos quais nós poderemos algum dia tratar amplamente.

II. ADVERTÊNCIA

Se se encontram fabricantes de órgãos e outros instrumentos ou alguns outros artesãos que desprezam essa maneira de dividir as escalas do alaúde, da viola, etc. ou o diapasão, e que acreditam fazer melhor apenas pela prática e pela bondade de sua orelha do que por todos os métodos que nós prescrevemos até o presente, nós não os impedimos de seguir o que lhes agradará. Mas nós podemos lhes assegurar que eles jamais errarão ao seguir as maneiras que nós explicamos em várias passagens desta obra.

55 A definição euclidiana VII.20 é a seguinte: "E um [número] cubo é o igual um número igual de vezes, um número igual de vezes, ou [o] contido por três números iguais", conforme a tradução de Irineu Bicudo.

56 Proposição II.4 do livro *Da esfera e do cilindro* de Arquimedes: "Cortar uma dada esfera por meio de um plano de modo que os volumes dos segmentos estejam um em relação ao outro em uma dada razão".

Quanto às práticas mais seguras, convém consultar os melhores fabricantes de instrumentos, como o são Valéran o Pecador[57] e muitos outros, que fizeram a maior parte dos órgãos que se veem hoje nas igrejas, e dos quais se pode saber tudo o que falta neste tratado, ao qual nós acrescentaremos uma fuga, que contém tudo o que pode ser feito nos órgãos ordinários. Mas se se quer usar teclados que contêm três gêneros de música em sua perfeição, dos quais eu falei bastante ao longo de muitos trechos, encontrar-se-ão muitas passagens e figuras tão excelentes quanto raras; além do mais, a justeza dos intervalos tanto consonantes como dissonantes trará novas vantagens à música. Contudo, desejo que se leia a quadragésima quarta proposição com a primeira e segunda proposição, a fim de que elas se ajudem mutuamente, e ao mesmo tempo o prefácio deste livro, que serve à compreensão deste tratado.

57 Valéran de Héman (1584-1641), também conhecido como Valéran o Pecador, foi um famoso fabricante de órgãos que trabalhou na construção e reconstrução de diversos órgãos de igrejas espalhadas na França, inclusive na do órgão da Catedral de Notre-Dame de Paris.

DEMONSTRAÇÃO DE MYDORGE (PUBLICADA EM 1629 NO JOURNAL DE BEECKMAN)

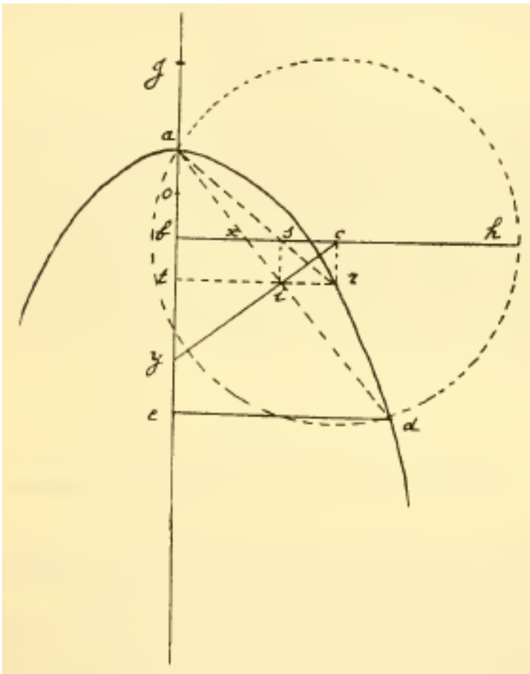
O PROBLEMA DAS DUAS MÉDIAS PROPORCIONAIS PODE SER DEMONSTRADO COM UMA PARÁBOLA[58]

Quando o Sr. Descartes buscava demonstrar o problema das duas médias proporcionais, certo matemático francês de Paris demonstrou-o geometricamente do seguinte modo. E isso transcrevi à letra.

Demonstra-se que duas médias proporcionais podem ser encontradas por meio de uma parábola.

PROBLEMA SÓLIDO CONSTRUÍDO DE MANEIRA SÓLIDA[59]

Dadas duas linhas retas, determinar duas médias em proporção contínua. Sejam dadas as duas médias, sendo a menor *gb* e a maior *bh*. Deve-se então encontrar entre elas duas médias em proporção contínua.



Ἀναλυτικῶς[60]

58 Tradução do latim da demonstração de Descartes publicada do *Journal* de Isaac Beeckman, *Journal de 1604* à *1634*. *Tome 4: Supplément*, (ed.) Cornelis de Waard, La Haye: M. Nijhoff, 1953, pp. 136-138. Disponível em < https://www.dbnl.org/tekst/beec002jour04_01/beec002jour04_01_0037.php#1154 >. Acesso em: 28 de março de 2021. O texto latino foi também publicado na edição Adam-Tannery das obras completas de Descartes. *Jornal de Beeckman* (AT, X, 342-344). Para uma análise dos passos da demonstração, cf. SASAKI, 2003, p. 171-172.

59 Sasaki traduziu "*solide*" por "verdadeiramente", como um sinal da generalidade da prova. Mas, Frédéric de Buzon, em sua edição francesa, traduziu essa mesma palavra por "de maneira sólida", e lembra que "sólida" aqui se opõe a "plana".

60 "Analiticamente", ou "pelo método analítico", em grego.

Seja já feito[61] e sejam duas médias na figura anexa, *ed* é a menor e *ea* é a maior. E uma vez que *ed* e *ea* são médias em uma proporção contínua, *gb* estará para *ed*, e assim *ed* estará para *ea* e *ea* para *bh*; e o quadrado contido pela segunda *de* é igual ao retângulo contido pela primeira [*gb*] e terceira [*ea*][62]. Assim, se se estabelece a segunda *de* e traçada regularmente e em ângulos retos da terceira *ae*, será *ae* o eixo da parábola cujo vértice é *a* e o *latus rectum* será a mesma primeira linha *gb*. Seja descrita então a parábola.

Uma vez que *bg* está para *de* assim como *de* está para *ea* e *ea* está para *bh*, tendo-se extraído todas as raízes quadradas (com efeito, traçadas por *ad*, que é bissectada em *i*, e *ti* prolongada a *r*, afim de que seja igual e paralela à metade de *bh*, isto é: *bc*), assim: *ab* estará para *bs*, isto é: *ti*, e *ti* estará para *ta*, e *ta* estará para *tr*, isto é: *bc*. Desse modo, são ambos *ati* e *atr* triângulos semelhantes e equiângulos, e o ângulo *tai* igual ao ângulo *art*. Mas, *at* está para *tr*, assim como *si* está para *ir*, isto é: *is* está para *sc* (com efeito, traçando *is* e *cr* paralelas ao eixo), e assim *yt* está para *ti*. Desse modo, os triângulos *atr*, *isr*, *yti* e *ita* também são semelhantes e equiângulos, e por essa razão os ângulos *art, ics*, *yit* e *tai* são iguais entre si. E, devido à semelhança [de triângulos], *at* está para *ti*, *ti* está para *ty*; com efeito, *aiy* é um ângulo [inscrito] no semicírculo, e logo é reto. Ademais, o [ângulo] adjacente *aic* também é reto. Assim, devido à igualdade de *ai*, *id* e ao [segmento] comum *ic*, os triângulos *aic*, *dic* serão semelhantes e iguais entre si, e por isso *ac* é igual a *cd*, e ambos são raios do círculo cujo centro é *c*.

Συνθετικῶς[63]

Construa-se então. Sobre a linha *ge* indeterminada, seja cortada *ab* igual à metade da menor extremidade *gb* e fique alteada em ângulos retos sobre *ab* a *bh* igual à maior extremidade; tendo sido essa última bissectada em *c*, fique descrita a circunferência do círculo com centro em *c* e distância *ca*. Sendo *ab* bissectada em *o*, fique descrita a parábola *ad* com foco *o* e vértice em *a* cortando a circunferência no ponto *d*, do qual *de* é alteada regularmente e em ângulos retos. Digo que a mesma [reta] *de* é a menor das médias solicitadas e *ae* é a maior. Desse modo, *gb* estará para *de*, assim como *de* estará para *ae* e *ae* para *bh*.

᾿Απόδειξις[64]

E uma vez que *ac* e *cd* são iguais, bem como *ai* e *id*, o ângulo *aic* será reto e, por essa razão, o ângulo *aiy* também será reto. Mas [como o ângulo] *ati* também é reto, então *yt* está para *ti*, assim como *ti* está para *ta*. Mas, como [o ângulo] *isc* também é reto e [as retas] *bc* e *tr* são paralelas, *ut* está para *ti*, assim como *is* está para *sc*, isto é: *yb* está para *bc*. E como [o ângulo] *sir* é reto e *si* e *cr*, bem como *sc* e *ir*, são [retas] paralelas, então *is* está para *sc*, isto é: *is* está para *ir*, assim como *ta* está para *tr*. Desse modo, *yb* está para *bc*, isto é: *yt* está para *ti*, assim como *at* está para *tr*. Mas, além disso, *yt* está para *ti*, assim como *ti* está para *ta*. Assim, *ti* está para *ta*, assim como *ta* está para *tb*, isto é: para *bc*. Ora, como *ti* está para *at*, assim como *de* está para *ae* e como *at* está para *tr*, isto é: *bc*, *ae* está para *bh*. Desse modo, *bg* está para *ed*, assim como *ed* está para *ae* e *ae* está para *bh*. O que era preciso provar.

61 No texto da obra de Mydorge o que já aparece feito são as figuras que têm as letras sublinhadas.

62 Ou seja: $de^2 = gb + ea$.

63 “Sinteticamente”, ou “pelo método sintético”, em grego.

64 “Demonstração” em grego. Essa parte da demonstração não foi reproduzida na edição Adam-Tannery.

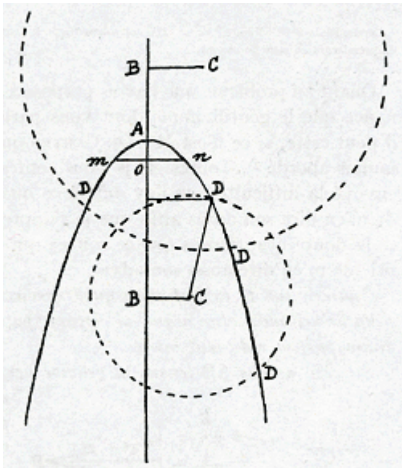
DEMONSTRAÇÃO DE DESCARTES (PUBLICADA EM 1629 NO JOURNAL DE BEECKMAN)

COM A AJUDA DE UMA PARÁBOLA, CONSTRUIR TODOS OS PROBLEMAS SÓLIDOS POR MEIO DE UM MÉTODO GERAL[65]

Expor equações cóssicas em uma parábola por linhas

O que o Sr. Descartes em outro lugar chama de seu segredo universal para expor equações que envolvem terceiro ou quarto grau por linhas geométricas. O que copio à letra de seus escritos:

Primeiramente, que uma equação tenha sido preparada de tal modo que fique um biquadrado igual a ou certo número de quadrados, ou certo número de raízes e ou certo número absoluto[66].



Em seguida, que seja descrita uma parábola de vértice A e foco O, de tal modo que o seu *latus rectum* mOn passando pelo foco seja a unidade; e seja traçado o diâmetro AO em ambos os lados ao infinito, e que nela fique tomado o ponto B, dentro ou fora da parábola, do qual é alteada em ângulos retos a linha BC, e que seja descrito do centro C o círculo DD, que intersectará a circunferência da parábola em dois, ou em um ou três [pontos], e, se passar pelo vértice, em quatro pontos, dos quais as linhas traçadas perpendicularmente sobre o diâmetro AO serão todas raízes da equação proposta.

Contudo, se o número dos quadrados for indicado com o sinal , a linha AB será a metade da soma da unidade e do número dos quadrados, e será tomado dentro da parábola. Mas se for indicado com o sinal , a linha AB será a metade da diferença entre a unidade e o número dos quadrados[67]; e dentro da parábola se essa diferença for menor que a unidade; mas se for maior, será fora [da parábola]; se for igual, no vértice.

65 Tradução do latim da demonstração de Descartes publicada do *Journal* de Isaac Beeckman, *Journal de 1604* à *1634*. *Tome 4: Supplément*, (ed.) Cornelis de Waard, La Haye: M. Nijhoff, 1953, pp. 138-139. Disponível em < https://www.dbnl.org/tekst/beec002jour04_01/beec002jour04_01_0037.php#1154 >. Acesso em: 28 de março de 2021. O texto latino foi também publicado na edição Adam-Tannery das obras completas de Descartes. *Journal de Beeckman* (AT, X, 344-346) Para uma análise dos passos da demonstração, cf. BOS, 2001, p. 256-257.

66 Com o auxílio do simbolismo algébrico: , mas no original consta: *biquadratum aequale + vel – certo numero quadratorum, + vel – certo numero radicum, & + vel – certo numero absoluto*.

67 Na verdade, deve-se ler p ao invés de . Cf. BOS, 2001, 257, nota 8.

Do mesmo modo, a linha BC será a metade do número das raízes. E, por fim, o semidiâmetro do círculo CD será a raiz quadrada da soma do quadrado construído sobre a linha CA se o número absoluto tiver, de fato, o sinal ; contudo, se tiver o sinal , o semidiâmetro CD será a raiz da diferença, pela qual o quadrado da linha CA ultrapassa o número absoluto. Com efeito, deve ultrapassá-lo: do contrário, não haverá raiz verdadeira em toda a equação, mas elas serão todas imaginárias, e, em geral há tantas raízes verdadeiras na equação como há pontos nos quais o círculo mencionado corta a parábola além do vértice. E se tiver um sinal no número das raízes, apenas dentre as raízes verdadeiras serão explícitas aquelas na extremidade das quais as linhas traçadas em direção ao centro do círculo cortarão o diâmetro da parábola; as outras, contudo, serão implícitas. E, por outro lado, se no número das raízes tiver o sinal , as raízes explícitas serão as que ficam no lado da parábola no qual está o centro do círculo, e as implícitas todas que se encontrem no outro lado. E nada nessa regra sofre exceção ou defeito.

O Sr. Descartes demonstrou tanto apreço por essa descoberta que ele confessou nunca ter encontrado algo tão excepcional e que ninguém encontrara algo mais excepcional.

Fontes primárias

ARQUIMEDES. *The Works of Archimedes*. Tradução: Thomas Heath. Cambridge: Cambridge University Press, 1897.

BEECKMAN, Isaac. *Journal de 1604 à 1634*. *Tome 4: Supplément*, (ed.) Cornelis de Waard, La Haye: M. Nijhoff, 1953, pp. 136-138. Disponível em <https://www.dbnl.org/tekst/beec002jour04_01/beec002jour04_01_0037.php#1154>. Acesso em: 28 de março de 2021.

DESCARTES, René. *Oeuvres De Descartes*, 11 vols., (ed.) Charles Adam e Paul Tannery, Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1983.

DESCARTES, René. *Oeuvres complètes t.1. Premiers* écrits *et Règles pour la direction de l'esprit*. Paris: Gallimard, 2016.

EUCLIDES. *Os Elementos*. Tradução: Irineu Bicudo. São Paulo: Unesp, 2009.

HARDY, Claude. *Examen de la duplication du cube, et quadrature du cercle*. Paris: Robert Sara, 1630.

MERSENNE, Marin de. *Correspondance du P. Marin Mersenne religieux Minime, Vol. I, 1617-1627*, (ed.) Cornelis de Waard, Paul Tannery, A. Beaulieu, et *alii*, Paris: CNRS Éditions, 1945.

MERSENNE, Marin de. *La vérité des sciences contre les septiques ou Pyrrhoniens.* Paris: Toussaint Du Bray, 1625.

MERSENNE, Marin de. *Harmonicorum Libri, in quibus agitur desonorum natura, causis et effectibus*. Paris: Guillaume Baudry, 1636.

MERSENNE, Marin de. *Harmonie universelle contenant la théorie et la pratique de la musique.* Paris: Pierre I Ballard, 1637.

MYDORGE, Claude. *Prodromi catoptricorum et dioptricorum.* Paris: J. Dedin, 1631.

YVON, Paul. *Quadrature du cercle.* La Rochelle: Jérôme Haultin, 1619.

Fontes secundárias

BOS, H. J. M. *Redefinig Geometrical Exactness – Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*. New York: Springer Verlag, 2001.

COSTABEL, Pierre. *Démarches originales de Descartes Savant*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1982.

CRIPPA, Davide. Impossibility results: from geometry to analysis. A study in early modern conceptions of impossibility. Tese (Doutorado em Filosofia). Universidade Paris Diderot (Paris VII), 2014.

LÜTZEN, Jesper. The Algebra of Geometric Impossibility: Descartes and Montucla on the Impossibility of the Duplication of the Cube and the Trisection of the Angle. In: *Centaurus*, 52:4–37, 2010.

MANDERS, Kenneth. *Euclides or Descartes? Representation or Responsiveness*. Não publicado.

MAIERÙ, Luigi. *Le sezioni coniche nel Seicento.* Soveria Mannelli: Rubbettino Editore, 2009.

RABOUIN, David. Les mathématiques de Descartes avant la Géométrie. In: THIBAUT, Gress. *Cheminer avec Descartes. Concevoir, raisonner,comprendre, admirer et sentir*. Paris: Classiques Garnier, p. 293–311, 2018.

SAITO, Ken. Book II of Euclid's Elements in the Light of the Theory of Conic Sections. In: *Historia Scientiarum*. 28:31-60. 1985.

SASAKI, Chikara. *Descartes' Mathematical Thought*. Holanda: Kluwer Academic, 2003.

SERFATI, Michel**.** *De la méthode: recherches en histoire et philosophie des mathématiques*. Besançon: Presses universitaires franc-comtoises, 2002.

SHEA, William. *La magia de los* números y *el movimiento – La carrera científica de Descartes*. Madrid: Alianza Universidad, 1993.

Resumo

O presente texto tem dois objetivos. Primeiro, o de reconstruir as lacunas do desenvolvimento histórico do problema das duas médias proporcionais tal como foi investigado por Descartes e outros matemáticos de seu círculo (Mersenne, Beeckman, Mydorge e Roberval, nomeadamente) antes da publicação d'*A Geometria* (isto é: o período entre 1625-1637), acompanhado da tradução das demonstrações que foram o resultado dessa interação. Em segundo, o de extrair alguns elementos que justifiquem as preferências demonstrativas de Descartes a partir de uma comparação de sua demonstração com as de Mydorge e Roberval.

Palavras-chave: duas médias proporcionais; geometria; Descartes; Mydorge; Roberval; Mersenne.

Abstract

This paper has two aims. First, I fill the lacunae in the historical development of the problem of the two mean proportional as investigated by Descartes and other mathematicians of his circle (namely Mersenne, Beeckman, Mydorge, and Roberval) before the publication of The Geometry (i. e.: the period between 1625-1637), accompanied by the translation of the demonstrations that were the result of the interaction between them. Secondly, I draw some elements that justify Descartes's demonstrative preferences from a comparison of his demonstration with those of Mydorge and Roberval.

Keywords: *two mean proportionals; geometry; Descartes; Mydorge; Roberval; Mersenne.*