

# O MODELO DE VON NEUMANN E A FASCINAÇÃO COM A TEORIA DO CRESCIMENTO EQUILIBRADO

*Joanílio Rodolpho Teixeira*\*

Departamento de Economia, Universidade de Brasília – UnB

Campus Universitário Darcy Ribeiro, CEP 70919-900, Brasília, DF, Brasil  
e-mail: joanilioteixeira@hotmail.com

**RESUMO** Este trabalho trata do modelo de crescimento de von Neumann e da fascinação exercida pelo mesmo entre economistas. São salientadas as características clássicas da abordagem para o problema de uma economia em expansão uniforme, assim como sua conexão com modernas teorias do crescimento. É também oferecida uma visão panorâmica do complexo processo de modelagem, incluindo seus objetivos e limitações.

**Palavras-chave:** crescimento, modelagem, von Neumann

**Classificação JEL:** 041, P16, F02

## VON NEUMANN'S MODEL AND THE FASCINATION WITH THE THEORY OF BALANCED GROWTH

**ABSTRACT** This paper deals with von Neumann's growth model and its fascinating influence on economists. The classical characteristics of this mathematical approach to the problem of a uniformly expanding economy as well as its connection to modern theories of growth are emphasized. A panoramic view of the complex role of modelling is equally provided.

**Key words:** growth, model, von Neumann

---

\* Este trabalho foi desenvolvido durante nossa permanência como pesquisador convidado no CEPREMAP – Centre d'Études Prospectives d'Économie Mathématique Appliquées à la Planification, Paris, no ano acadêmico de 1999-2000. Agradecemos ao CEPREMAP pelo estimulante ambiente de pesquisa e à Capes-Brasil pelo apoio ao projeto. Agradecemos também a *referees* anônimos cujos comentários foram inestimáveis. Naturalmente o autor, apenas, é responsável por possíveis erros e omissões.

## INTRODUÇÃO

São poucos os trabalhos acadêmicos, publicados em revistas especializadas ou anais de eventos, que geraram impacto semelhante no desenvolvimento das modernas teorias de crescimento econômico como o apresentado, originalmente, por von Neumann, no seminário de matemática da Universidade de Princeton, Estados Unidos, no inverno de 1932. É importante destacar que, inicialmente, seu modelo de uma economia em expansão uniforme não chamou significativa atenção dos economistas, pouco acostumados a pensar em termos simbólicos expressos de forma tão abstrata.

Como é bem conhecido, o mérito maior do modelo de von Neumann está na elegância da solução matemática de um problema teórico bastante complexo. Ele trata, simultaneamente, de diversas questões que, para muitos economistas, não eram vistas como componentes de um mesmo problema ou cuja dificuldade superava o instrumental requerido para tal análise — a topologia.

Do ponto de vista teórico, von Neumann se preocupa com a escolha de níveis de atividades que permitam a expansão uniforme de uma economia que produz  $n$  bens através de  $m$  processos ( $n < m$ ) envolvendo retornos constantes de escala, em um esquema de produção conjunta. Sua atenção centra-se na possibilidade de um valor máximo para a taxa de crescimento de tal modelo. Naturalmente, em um mundo econômico com mercadorias produzidas conjuntamente, se as taxas de crescimento das mesmas são distintas, não existe sentido operacional no conceito de taxa de crescimento uniforme a menos que seja introduzido um complicado problema de números índices.

Embora haja controvérsia sobre a natureza clássica ou neoclássica da abordagem, acreditamos que o pêndulo se inclina favoravelmente ao pensamento clássico, incluindo Marx. A produção de mercadorias requer trabalho, meios “produzidos” de produção e recursos naturais. Requer também uma ampla compreensão das inter-relações entre classes sociais, crescimento populacional, ritmo de acumulação e peculiaridades tecnológicas. Outro elemento crucial no enfoque clássico é a visão do processo produtivo como um fluxo circular de produção que envolve o conceito de excedente. Essa é a parcela que “sobra” do produto “anual” após a dedução do salário real e dos meios de produção que devem ser repostos (por causa da depreciação dos

mesmos) e expandidos para dar continuidade ao processo de reprodução ampliada.

O excedente econômico abre a possibilidade do aumento da escala de produção, que pode ser equilibrada ou desequilibrada, dependendo da proporção do mesmo e de sua alocação física. Em geral, os economistas clássicos supõem que os salários reais, ou “necessidades de vida” são pagos no início de cada período de produção e são, portanto, parte do capital utilizado. Como argumentam Kurz e Salvadori (1997: 110): “Uma passada de olhos na história do pensamento econômico mostra que de Adam Smith, via David Ricardo, Robert Torrens, Thomas Robert Malthus, Karl Marx, até John von Neumann, tanto o equilíbrio como a taxa real de acumulação do capital e logo tanto o equilíbrio como a taxa de crescimento do produto como um todo eram vistos depender do comportamento dos agentes, isto é, determinados endogenamente.”

As preocupações essenciais do modelo de von Neumann podem ser assim sumarizadas: (i) possibilidade de uma trajetória de expansão uniforme máxima; (ii) eficiência intertemporal da mesma; (iii) significação normativa de tal trajetória. Sua resposta a essas questões requer um tratamento formal intrincado. Ele se concentra no rigor do argumento matemático, no enunciado completo e sem ambigüidades das hipóteses relevantes e nas conclusões decorrentes.

Essa abordagem austera e compacta, despojada de ilustrações exemplificadoras, ou de elementos descritivos na forma literária, sugere razões da dificuldade encontrada por seus contemporâneos em avaliar certas questões de fundo tratadas por von Neumann. Uma versão preliminar do seu trabalho foi publicada originalmente em 1938, quando incluída em uma coletânea de artigos em alemão, editada por Karl Menger, em Viena. A publicação em inglês, contendo pouco mais que oito páginas, apenas ocorreu em 1945 e foi acompanhada de uma resenha esclarecedora, de nove páginas, na mesma edição da *Review of Economic Studies*, tendo com autor David Champernowne, que contou com a colaboração de Nicholas Kaldor e Piero Sraffa.

Segundo Romer (1995: 67), pode-se suspeitar que esse longo hiato entre a apresentação original do trabalho e sua publicação definitiva pode ser atribuído à percepção, por parte de von Neumann, de que o problema formal (modelagem) envolvido era demasiadamente trivial para um grande matemático. Essa, no entanto, não nos parece ser a percepção correta. Na prova

da existência do equilíbrio, von Neumann utiliza um novo instrumental analítico, que é uma generalização do teorema do ponto fixo de Brouwer.<sup>1</sup> O uso de desigualdades em vez de equações, a adoção do critério max-min associado à teoria dos jogos, assim como a concepção da dualidade entre preços e quantidades, além da própria técnica formal da prova, sugerem que o autor valorizava não apenas o conteúdo matemático inovador de seu modelo mas também a generalidade, do ponto de vista da teoria econômica, do mesmo.

A razão do longo período de incubação para publicar o trabalho não é bem conhecida, sendo ainda hoje motivo de preocupação para um seleto grupo de pesquisadores que centram atenção na análise da formação das idéias econômicas. Segundo Pasinetti (1993: 3), o modelo de von Neumann, do ponto de vista estritamente analítico e matemático, tem a reputação de ser o mais elegante dos modelos de crescimento econômico. Ainda assim, tal formulação repousa, essencialmente, no conceito de estrutura invariante ao longo do tempo. Nesse caso, faz sentido perguntar por que tal modelo tem exercido, em geral, tamanha fascinação entre os economistas, quando a dinâmica real de capitalismo não é a do crescimento equilibrado.

No presente trabalho mostramos alguns elementos que facilitam a compreensão das origens clássicas do modelo de von Neumann; é feita uma apresentação sucinta do mesmo; consideramos certos avanços teóricos que contornam algumas de suas limitações originais e conjecturamos sobre possíveis razões para a fascinação que ele tem exercido. Além dessa introdução, o texto é constituído por três seções. A seção 1 trata de uma descrição dos fundamentos do modelo geral de equilíbrio de longo prazo de von Neumann. A seção 2 resume a formulação matemática do mesmo e indica algumas de suas extensões. A seção 3, conjectura sobre motivos aparentes da fascinação pela modelagem, em especial aquela da dinâmica do crescimento proporcional.

## **1. FUNDAMENTOS DO MODELO DE VON NEUMANN**

Como já vimos, von Neumann trata a atividade econômica do ponto de vista da produção conjunta e a partir de um sistema de desigualdades lineares. Seu conceito de produção conjunta não se limita ao caso trivial de bens que não podem ser obtidos separadamente tal como, digamos, lã e carne de car-

neiro, que têm um papel apenas subsidiário na análise econômica (Teixeira, 1998: 283). Ele trata as mercadorias (inclusive a força de trabalho) como insumos no início do processo produtivo e como resultado da própria atividade no final do período uniforme de produção. Assim, o produto dos trabalhadores de cada “ano” é igual à nova produção mais o que sobra dos insumos utilizados. Sua abordagem permite tratar tanto do capital fixo como do circulante, podendo descrever o desgaste e a depreciação via diferentes estágios (bens distintos) no próprio processo produtivo. Essa é uma abordagem sugerida originalmente por Torrens, segundo Sraffa (1960).

Ele não busca a solução de um completo sistema dinâmico a partir de condições históricas dadas, mas supõe que o sistema determina endogenamente suas próprias condições iniciais. Logo, não havendo restrições *a priori* quanto à composição dos estoques originais, os níveis das atividades podem ser estabelecidos a partir de qualquer base não negativa. Para simplificar, as atividades satisfazem a hipótese de aditividade e retornos constantes de escala. A força de trabalho é reproduzida dentro do próprio sistema, desde que os bens por ela requeridos estejam disponíveis na forma de uma composição fixa que permita a subsistência dos trabalhadores. Por outro lado, von Neumann supõem que os capitalistas reinvestem todo excedente. Esse conjunto de hipóteses permite fixar a atenção nos mecanismos que determinam quantidades relativas, preços, taxas de juros (taxa de lucro) e a taxa de expansão da economia como um todo.

Os resultados por ele obtidos dependem essencialmente das condições de oferta, pois as condições de demanda, do ponto de vista neoclássico, estão virtualmente ausentes. A única maneira de preferências influenciarem o desempenho da economia é através do vetor dos meios de subsistência, mas tal vetor é parte da própria estrutura fixa de insumos requeridos. Como a força de trabalho é vista como *animal farm*, expressão utilizada por Champernowne (1945), fica problemático conjecturar sobre preferências do consumidor. A taxa de salário real é dada fora do sistema e, naturalmente, uma variação na mesma deve acarretar uma mudança na solução de equilíbrio.

O modelo de von Neumann requer cinco regras de comportamento: (i) da lucratividade; (ii) dos bens livres; (iii) do sistema produtivo; (iv) da taxa de juros (ou lucro); e (v) dos sistemas de preços. A primeira garante que serão utilizados apenas aqueles processos cujos preços de produção e

taxa de juros impliquem lucros extras (supernormais) nulos. A segunda estabelece que, em equilíbrio, aquelas mercadorias cuja produção excede a taxa de expansão da economia são bens não escassos e, logo, têm preço nulo. Essa regra não se aplica à força de trabalho, cujo *wage bundle* é dado exogenamente e independente tanto dos preços relativos como do nível de emprego. A terceira regra indica que o sistema de produção efetivamente utilizado terá maior taxa de expansão (equilibrada) que qualquer outro possível. A penúltima mostra que, em equilíbrio, a taxa de juros (lucro) é igual à taxa de expansão da economia. A regra final anuncia que, em equilíbrio, o sistema de preços estará associado a uma taxa de juros cujo valor é menor ou igual a qualquer sistema alternativo de preços.

O que o modelo em discussão contém de essencial (nos abstraindo de elementos importantes como *insight* e elegância matemática) é a prova rigorosa de uma relação fundamental, no longo prazo, entre a taxa de crescimento uniforme da economia e a taxa geral de lucro, um problema central na história do pensamento econômico. Sua contribuição para resolver essa questão se caracteriza pela generalidade da abordagem e constitui um passo decisivo no tratamento analítico de uma importante questão teórica.

É agora necessário fazer uma reflexão sobre a teoria do valor que sustenta o modelo de von Neumann. Naturalmente, esse é um tema polêmico e aqui apenas apreciaremos uma das posições do confronto. O modelo em análise trata da produção pura e, como salienta Nicola (1987: 226), não é fácil decidir sobre qual é a teoria específica do valor embutida no mesmo. Von Neumann obtém preços de produção determinados completa e exclusivamente pelos processos (atividades) produtivos existentes. Contudo, sua abordagem não se baseia estritamente na teoria clássica do valor do trabalho, mas em uma reinterpretação da mesma.

Como é bem conhecido, a teoria “objetiva” do valor se fundamenta no pressuposto que a formação do mesmo é independente de relações de troca e pode ser estudada tomando como referência a complexa organização do processo produtivo. Em particular, a teoria clássica do valor pressupõe um sistema de produção alicerçado na divisão do trabalho, que depende do tamanho do mercado (demanda efetiva) e da capacidade de produção de excedentes. Não há dúvida que no modelo de von Neumann os preços são preços de produção, já que são determinados apenas pelo processo produtivo. Ele trata de valores médios da produção.

Passando para outro tópico relevante, cumpre destacar que von Neumann não faz qualquer referência ao número de períodos requeridos para que o sistema em expansão atinja o estado de equilíbrio. A taxa de crescimento uniforme é dada pela capacidade de expansão dos bens que menos crescem, preservando indefinidamente as mesmas relações técnico e socioeconômicas.

Não estão presentes no modelo algumas características importantes do modo de produção capitalista, como novos produtos, novos processos produtivos e, de modo geral, o que é conhecido como progresso tecnológico. Contudo, sua abordagem faz parte da família dos recentes modelos de crescimento endógeno que tanto vêm fascinando a comunidade acadêmica e *policy makers*. Segundo Romer (1995), o curioso é que um expressivo subconjunto dos modelos de crescimento endógeno não faz mais do que reviver, com diferentes roupagens e interpretações, o modelo linear de von Neumann. Alguns deles buscam incluir questões relativas à expansão do conhecimento, a novas descobertas e novas idéias. Tais bens diferem essencialmente das mercadorias convencionais, e não se pode negar a importância das mesmas na construção de modelos que possam melhor refletir a dinâmica do capitalismo.

No entanto, no início do novo milênio, não se chegou ainda a um razoável consenso sobre como modelar processos envolvendo patentes, educação, capital humano, *learning by doing*, *knowledge spillovers* e outros bens não convencionais. As armadilhas da economia contemporânea surpreendem e estimulam, desafiando os economistas para um novo olhar sobre os modelos e a realidade que nos cerca. Esta é demasiado complexa e conflitiva, mas a capacidade criativa e a sensibilidade, como mostradas por von Neumann, servem de exemplo a ser aproveitado. Essa reflexão não implica aceitar que certos paradigmas e formas de abordagem sejam definitivos. Mesmo modelos dos mais sofisticados apresentam limitações a serem superadas, como veremos.<sup>2</sup>

## 2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA E EXTENSÃO DO MODELO

Para sumarizar formalmente a abordagem de von Neumann, introduzimos a seguinte definição: seja a quádrupla  $(\alpha, \beta, x, p)$ , onde  $\alpha = 1 + g$  é o fator de expansão, sendo  $g \geq 0$  a taxa de crescimento da economia;  $\beta = 1 + \pi$  é o fator

de juros, onde  $\pi \geq 0$  é a taxa de juros (lucro);  $x$  e  $p$  são vetores representando a intensidade da produção e os preços, respectivamente. Tal quádrupla constitui o equilíbrio de von Neumann para as matrizes não negativas  $A$  (de insumos) e  $B$  (do produto), que têm dimensão  $(n \times m)$ , onde  $n$  indica o número de bens e  $m$  o de processos produtivos lineares ( $m > n$ ), desde que certo conjunto de propriedades seja atendido. A primeira matriz inclui os meios de subsistência dos trabalhadores.<sup>3</sup>

Seguindo Thompson (1987: 821), o modelo apresenta as seguintes relações primais:

- i)  $xB \geq \alpha xA$                       ou                       $x(B - \alpha A) \geq 0$
- ii)  $Bp \leq \beta Ap$                       ou                       $(B - \beta A)p \leq 0$
- iii)  $x(B - \alpha A)p = 0$
- iv)  $x(B - \beta A)p = 0$
- v)  $xBp > 0$

A primeira expressão torna o modelo fechado no sentido de que os insumos de dado período, multiplicados por  $\alpha$ , são não maiores que o produto do período anterior. A segunda faz com que a taxa de juros seja tal que a economia não possa exibir lucros extras. A terceira garante que qualquer mercadoria produzida acima das necessidades seja um bem livre e assim pode ser descartada a preço nulo, mas esse pressuposto não é válido para a força de trabalho. A quarta força a exclusão de processos que requerem custos extras. A quinta expressão garante que o valor agregado das mercadorias produzidas é positivo, já que a matriz do produto é semipositiva e tanto o vetor de intensidade quanto o de preços são semipositivos.

Dado o par de matrizes  $A$  e  $B$ , para provar que existem soluções formadas por  $x$ ,  $p$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ , é necessário incluir a hipótese de que todo processo requer como insumo ou produz como resultado certa quantidade positiva de cada um dos bens, logo  $A + B = C$ , onde  $C$  é uma matriz positiva. Von Neumann adiciona ainda a hipótese da disponibilidade ilimitada dos recursos primários requeridos para a expansão da economia.

A partir do conjunto de proposições acima, ele prova a existência de uma solução única para o problema. Esta é dada por  $\alpha = \beta$ , resultado que fica determinado apenas pela mais eficiente utilização das técnicas disponíveis, dado o salário real.

Nas versões correntes da teoria do crescimento baseadas no modelo de von Neumann, em grande parte derivadas do trabalho de Kemeny, Morgenstern e Thompson (1956), algumas das hipóteses restritivas do modelo original foram afrouxadas. Por exemplo, foi removida a necessidade de  $C$  ser uma matriz positiva, substituindo-a pela proposição de que cada linha de  $A$  e coluna de  $B$  devem conter pelo menos um elemento positivo. Com isso é contornada a restrição original de cada processo requerer insumo positivo de todos os bens, o mesmo valendo para o produto. Essa nova formulação também flexibiliza a necessidade de a força de trabalho ficar limitada a receber apenas o salário de subsistência.

Morgenstern e Thompson, em dois trabalhos publicados em 1969 e 1976, generalizaram ainda o modelo para o caso de uma economia aberta. O esforço nessa direção foi completado por Löss (1974) e Moeschlin (1974). Nessas novas versões fica contornada a necessidade de todas as mercadorias superproduzidas serem bens livres, já que os preços das mesmas não devem cair abaixo dos seus respectivos preços de exportação ou subir acima dos de importação.

Uma das generalizações mais interessantes, do ponto de vista neoclássico, consiste em introduzir decisões de consumo por parte das famílias e decisões de investimento por parte das firmas. No contexto desse marco teórico, é possível obter um completo modelo de equilíbrio geral multiperíodo.

Outra possibilidade, agora associada à abordagem ricardiana, é salientar aspectos distributivos, reconsiderando o modelo de von Neumann à luz da teoria sraffiana, na qual fica explicitado o esquema de repartição do produto líquido entre salário e lucro. No caso simplificado em que os processos produtivos (lineares) são todos baseados na produção simples (não conjunta), foi provado por Lombardini e Nicola (1974) que a inclusão de decisões individuais de consumo não prejudica a integridade da fronteira taxa de salário-taxa de lucro, desde que exista um único fator primário. Estendendo essa análise para a situação em que existe produção conjunta, apenas os pontos fixos de uma certa transformação particular são soluções do modelo de von Neumann com demanda final exógena.

Como é bem conhecido, Sraffa (1960) utilizou sistemas de produção conjunta nos quais o número de processos utilizados é igual ao número de mercadorias — como consequência da minimização de custos. Como argumenta Schefold (1998: 195), para comparar os sistemas de Sraffa e von

Neumann, os primeiros economistas ricardianos usavam o conceito de crescimento equilibrado, com a taxa de lucro se igualando à taxa de expansão. Nas contribuições mais recentes, sobre tal comparação, tornou-se possível flexibilizar essa restrição, e permitir que a taxa de lucro seja superior à de crescimento. Este tema é explorado por Schefold (1988) e Bidard (1991).

Uma vez mencionadas certas relações e diferenças entre von Neumann e Sraffa, é necessário voltar a atenção para Leontief (1951). Para esses três autores, a produção é o centro do sistema econômico, concebido como um processo circular. O objetivo essencial de Leontief é descrever e quantificar a estrutura de uma economia real através de um modelo linear que opera com o par de matrizes ( $A$  e  $B$ ) de insumo e produto, respectivamente. Quando cada processo se refere à produção de apenas uma mercadoria, a matriz  $B$  fica reduzida a matriz identidade. Neste caso, o modelo de Leontief pode ser visto como um caso particular de von Neumann. Uma questão central refere-se à possibilidade de substituir a forma extensiva, como base da produção conjunta, pelo modelo na tradição de Leontief, envolvendo produção simples. A abordagem do tipo von Neumann-Sraffa lança luzes sobre as dificuldades envolvidas.

O problema da diferenciação entre consumo proveniente dos lucros e aquele decorrente dos salários tem sido outra preocupação que parece se constituir em linha promissora de pesquisa. Partindo de uma concepção à *la* von Neumann e integrando idéias de Kaldor (1955) e Pasinetti (1962), assim como de Samuelson e Modigliani (1966), diversos pesquisadores têm procurado encaminhar esforços em trabalhos de natureza mais agregada. Eles tratam de problemas ligados ao processo de crescimento e distribuição (longo prazo) envolvendo classes de grupos sociais. O ponto focal dessas análises está na possibilidade da existência de *steady states*, em um ambiente caracterizado por diferentes propensões a poupar entre trabalhadores e capitalistas (ou distintos grupos).

Pasinetti (1966), por exemplo, mostrou que, sob certas hipóteses, é possível obter-se, em *steady state*, a equação de Cambridge — essa se constitui na igualdade entre a taxa de lucro e a taxa de crescimento dividida pela propensão a poupar dos capitalistas. Note-se que tal resultado independe da taxa de poupança (positiva) dos trabalhadores, desde que ela seja inferior à dos capitalistas e também menor que a participação dos lucros na renda

multiplicada pela propensão a poupar dos capitalistas. Esse resultado, que desempenhou papel importante na controvérsia entre as duas Cambridges, baseia-se, essencialmente, na hipótese da constância da distribuição da renda e riqueza (fatos estilizados). Por outro lado, a taxa de crescimento de equilíbrio no longo prazo é a natural (dada exogenamente) e não a de von Neumann (endógena).

Trabalhos publicados por Morishima, principalmente seu livro (1973), em que é proposto um repensar de Marx à luz de von Neumann, também geraram interesse e polêmica na teoria econômica. Diversos pesquisadores procuraram incorporar os esquemas de reprodução de Marx no modelo de von Neumann. É importante salientar que a passagem de um paradigma holístico ou baseado na totalidade (Marx) para outro envolvendo basicamente relações técnico-econômicas (von Neumann) apresenta dificuldades.<sup>4</sup>

Até este ponto estivemos preocupados com considerações sobre o modelo geral de equilíbrio econômico de von Neumann descrito por um número finito de atividades geradas em um sistema poliédrico. Esta característica foi ampliada por Gale (1956) e Karlin (1959), entre outros, para situações que envolvem um nível bastante elevado de conhecimento matemático. Como podemos verificar, o trabalho pioneiro de von Neumann tem servido de notável inspiração para economistas e matemáticos bem-sucedidos no processo de reelaboração técnica e refinamentos formais do modelo. Contra-argumentando, tal sucesso obscurece excessivas simplificações, negligenciando questões problemáticas como tempo, moeda, avanço tecnológico, incerteza e o processo de ajustamento. Pode-se acrescentar a dificuldade de integração no modelo da teoria do crescimento com a das flutuações cíclicas.

Na próxima seção buscamos sugerir algumas razões para essa fascinação com um modelo preocupado com uma economia que expande uniformemente, quando o mundo real é caracterizado exatamente pela inexistência factual do crescimento equilibrado.

### 3. CONJECTURAS E CONCLUSÕES

Para a corrente ortodoxa, essencialmente, um modelo econômico é uma concepção lógico-matemática que contém o *hardcore* de determinada visão

teórica. As hipóteses do modelo devem ser mutuamente consistentes e as conclusões decorrentes devem ser deduzidas formalmente de modo rigoroso. As operações lógico-matemáticas buscam garantir a coerência interna do raciocínio e a arte da modelagem consiste na abstração, dedução e interpretação. Naturalmente, a relevância do problema deve ser também considerada.

Segundo Piaget (1967: 22), “conhecer não consiste, com efeito, em copiar o real mas em agir sobre o mesmo e transformá-lo (em aparência e realidade), de maneira a compreendê-lo em função dos sistemas de transformação aos quais são ligadas suas ações”. Este é um projeto ambicioso e jamais se completa. O que o pesquisador tem pela frente é um longo caminho, o desafio de vencer barreiras utilizando sua percepção do real e sua energia criadora. É legítimo perguntar se determinado esforço intelectual contribui decisivamente para o avanço do conhecimento.

Não é de se surpreender que a teoria econômica, especialmente aquela expressa na forma de modelos matemáticos, tenha objetivos relativamente ambiciosos. A proposta de pesquisar modelos “ingênuos” pode ser defendida com base no argumento de que algumas características pouco aceitáveis dos mesmos serão eventualmente superadas. Desse ponto de vista, modelos como o de von Neumann são protótipos de outros mais realistas, mas também mais complexos. Ele trata de uma concepção multissetorial (análise de atividades) dinâmica. Contudo, uma autêntica concepção dinâmica deveria tratar das variações na estrutura dos preços, produção e emprego, que emergem de modo não transitório. Para captar esse processo, o modelo deve levar em consideração a existência de diferentes taxas setoriais de crescimento, tanto da produtividade quanto das demandas. Ora, qualquer concepção, por mais sofisticada que seja, baseada na dinâmica da expansão uniforme, parece sugerir um hiato surpreendente entre o modelo e o mundo real. Como vimos, a abordagem de von Neumann preserva ao longo do tempo as mesmas proporções, descartando *a priori* qualquer reflexão genuína sobre desproporções e mudanças estruturais.

Certamente, o tratamento analítico de um processo tão complexo como o da reprodução e expansão da economia, das flutuações relativas dos preços, modificações desestabilizadoras na composição do produto, escolha de técnicas e aprendizado se constitui em desafio imenso, que impõe barreiras

insuperáveis às mentes mais brilhantes. Assim, é necessário selecionar o problema específico, proceder às simplificações necessárias, “reconstruir” a realidade e verificar em que medida, ou dentro de que limites, se está fornecendo uma “explicação” adequada para um problema concreto. A busca da superação das dificuldades da formalização tem nutrido o imaginário dos economistas. Muitos vêem as teorias diversas como conjuntos alternativos de hipóteses com determinado conteúdo ideológico e empírico. Os modelos seriam, essencialmente, construções lógico-matemáticas simplificadoras das teorias.

Se as ponderações acima são aceitas como razoáveis, torna-se estimulante ponderar sobre a fascinação dos economistas com alguns modelos específicos. Este é o caso do modelo de von Neumann. Diversas são as conjecturas possíveis. Uma tem a ver com a própria qualidade matemática da abordagem. Ele trata do desenvolvimento analítico de um problema topológico que se ajusta sintética e elegantemente ao estudo de um sistema auto-regulador em expansão uniforme. A possibilidade de afrouxar algumas hipóteses originalmente restritivas sugere caminhos a percorrer. Isto pode ser feito com autonomia e coerência, requerendo para tanto noções indispensáveis de topologia e economia, áreas em que têm ocorrido notáveis progressos assim como alguns desapontamentos.

Segundo a corrente dominante, para a economia vir a ser uma “verdadeira ciência”, é necessário que a teoria econômica tenha conteúdo matemático. O *status* da mesma ficaria enriquecido por tal motivação e os participantes nesse esforço — economistas matemáticos e/ou econométricos — merecem uma posição de destaque não apenas na comunidade acadêmica mas também no mundo dos negócios e da política.

Alguns críticos mordazes argumentam que a busca da excelência matemática por si só é insuficiente. Tal atividade seria parecida com aquela dos jogadores de xadrez. Segundo George Bernard Shaw, os últimos “são pessoas que crêem fazer qualquer coisa séria enquanto estão simplesmente perdendo tempo”. Madame Sévigne ainda acrescenta que “o xadrez é muito difícil para um jogo e pouco sério para uma ciência ou arte”. É claro que estas são críticas extremadas, pois o conteúdo do jogo de xadrez se fecha em si mesmo, enquanto o da teoria econômica abre uma janela para a compreensão de nossa circunstância.

Outra conjectura sobre as razões da fascinação exercida pelo modelo de von Neumann tem a ver com o talento natural para a matemática que parece emergir espontaneamente em determinados indivíduos, possibilitando-lhes, precocemente, algumas contribuições expressivas. Até certo ponto, a economia matemática, a música e novamente o xadrez são áreas que demandam uma enorme concentração de energia mas não requerem expressivas vivência e riqueza cultural. Contudo, exemplos como o de Capablanca (xadrez) e Mozart (música) não têm paralelos na história do pensamento econômico. Usualmente, o imaginário coletivo tem propensão a ver em enxadristas e economistas matemáticos elementos de alienação aos problemas do mundo real. Mentes mais abertas para a diversidade da condição humana argumentariam que é importante deixar desabrochar as mais diversas flores.

É ingenuidade negar que a formação dos economistas matemáticos tem privilegiado um compromisso conservador entre as exigências da academia e os imperativos do capitalismo moderno. Contudo, é obscurecedor não perceber a importância da modelagem no tratamento de um expressivo conjunto de problemas econômicos. Talvez a matemática seja mais aplicável a algumas áreas que outras. O que deve ser posto em cheque é se sua contribuição em determinadas situações é decisiva e insubstituível em relação a outros métodos cognitivos.

Naturalmente, o economista bem treinado deve ter como preocupação primária a análise de determinado problema concreto e para isso deve buscar os melhores métodos disponíveis. Como argumenta George (1988: 6), “as idéias econômicas não devem ser rejeitadas ou ignoradas simplesmente porque parecem ser difíceis de serem tratadas pelas técnicas-padrão da modelagem. Pode ser necessário desenvolver novas técnicas, talvez utilizando novos ramos da matemática”.

O trabalho de von Neumann sobre o crescimento uniforme fornece uma inspiração fundamental no sentido de estimular mentes receptivas a criar novos instrumentos de análise para difíceis problemas da teoria econômica. Seu trabalho seminal realmente não contempla concepções complexas como a de transformação estrutural. É de se esperar que novas gerações de economistas matemáticos sejam capazes de desenvolver novos métodos que possam tratar como processo único as principais mudanças de proporções e

reestruturações da dinâmica do desenvolvimento econômico. Mas o tipo de matemática requerido, o da organização, reorganização e reestruturação, é um problema analítico que ainda está por se constituir na forma de uma álgebra qualitativa.

Uma questão que tem sido colocada é se o modelo de von Neumann se constitui em uma descrição positiva do real ou se é um modelo normativo que serviria de instrumento para a política econômica. Von Neumann jamais esteve preocupado com tal caracterização e certamente acharia *naïve* qualquer interesse imediato em utilizar seu modelo, sem substanciais modificações, no planejamento normativo ou indicativo. Parece claro que a força da teorização consiste mais em levantar questões relevantes do que em fornecer *blueprints* imediatos para a reorganização da economia.

Naturalmente, existem algumas tentativas de se tratar o problema da alocação e criação de recursos,<sup>5</sup> e de analisar o desempenho de determinadas economias, utilizando conceitos direta ou indiretamente associados a von Neumann. Essas abordagens tendem a apresentar certo viés tecnocrático e um dos esforços mais expressivos nessa área de aplicação é de Murakami, Tokoyama e Tsukui (1976). Eles analisam a possibilidade de uma trajetória eficiente de acumulação e o *turnpike* (no sentido de auto-estrada ou rodovia expressa) para a economia japonesa.

A teoria do *turnpike*, que se baseia em conjectura de DOSSO (Dorfman, Samuelson e Solow, 1958), trata da existência de uma tendência, a longo prazo, de o desempenho eficiente de crescimento se aproximar da trajetória equilibrada de von Neumann. Para DOSSO, se os *policy makers* decidem as proporções setoriais desejadas para os estoques de capital no fim do plano, então, dada qualquer estrutura inicial na composição dos setores, se o horizonte de planejamento é suficientemente longo, o programa ótimo de alocação de investimentos apresentará características singulares. Na ausência de progresso tecnológico, nos períodos iniciais do plano haverá uma alteração na composição dos estoques setoriais no sentido da proporção equilibrada de von Neumann.

Quando for obtida uma configuração suficientemente próxima da mesma, haverá uma alocação de recursos de forma a preservar tal estrutura. Conseqüentemente, visualiza-se crescimento balanceado máximo durante a maior parte do plano. Ao se aproximar o final do horizonte de planeja-

mento, dado que as proporções finais desejadas para os estoques, em geral, não coincidem com a de von Neumann, ocorrerá uma alteração na alocação de recursos que possibilitará a convergência da estrutura econômica para as proporções requeridas.

Essa conjectura mereceu atenção especial dos economistas matemáticos nas décadas de 1960 e 1970 e o *teorema do turnpike* foi demonstrado por diversos autores. Alguns deles fazem referência aos casos em que a trajetória eficiente não converge para o raio de von Neumann (crescimento equilibrado), quando a configuração inicial (estrutura tecnológica) apresenta certas características matemáticas. Nesses casos, há a possibilidade de oscilações crescentes em torno do eixo de von Neumann. Tal situação é, de certa forma, excepcional (crescimento desequilibrado), como salienta Morishima (1964). Ele argumenta que, se as matrizes relevantes são primitivas (no sentido matemático), a possibilidade dos casos cíclicos fica eliminada.

A idéia de planejar a economia levando em consideração o teorema da auto-estrada que assegura (na maior parte do plano) a maior taxa possível de crescimento equilibrado apresenta certa atração. No entanto, ela é contraposta por aqueles que contemplam o desempenho real das economias do ponto de vista do desequilíbrio na dinâmica estrutural. Pasinetti (1993) argumenta que as mais evidentes objeções a modelos de dinâmica proporcional surgem espontaneamente quando se observa a realidade, caracterizada por um processo contínuo de mudanças relativas (sistemáticas e irreversíveis) na estrutura setorial das economias. Tal desempenho excluiria, como irrelevante, qualquer concepção teórica baseada na possibilidade de uma trajetória “quase catenária” ou assintótica para o crescimento equilibrado. Esta visão contrasta com as teorias dominantes de crescimento econômico, que são essencialmente aistóricas em caráter. Naturalmente, quando o progresso tecnológico e as mudanças estruturais são caracterizados, a História desempenha um papel fundamental, o que não ocorre com o modelo de von Neumann, ou presentes extensões.

O tema que procuramos tratar neste trabalho, o da fascinação dos economistas pelo crescimento equilibrado, quando o mundo real se caracteriza predominantemente pelo desequilíbrio estrutural, é polêmico e dá margem a diversas interpretações. Naturalmente, tal fascinação não se apresenta apenas em relação ao modelo de von Neumann, mas este não é o tema cen-

tral de nossa preocupação. Kaldor costumava argumentar que a justificativa decisiva da pesquisa científica, tanto no campo natural como no campo social, é ampliar nosso poder sobre o ambiente. Adições ao conhecimento são úteis, mesmo se elas não têm qualquer aplicação imediata — desde que sejam capazes de permitir a construção de “modelos” melhores que salientem aspectos críticos do *modus operandi*.

Por outro lado, é bem conhecido que von Hayek considerava provavelmente verdadeiro que a análise econômica nunca foi o produto de desprendida curiosidade intelectual sobre o porquê do fenômeno social, mas um desejo intenso de reconstruir um mundo afogado na insatisfação. As reflexões acima sugerem que não se deve ter aspirações exageradas sobre qualquer modelo. Todos apresentam limitações, e não se pode perder de vista o objetivo da formulação dos modelos propostos, inclusive ideologias imbutidas.

Como sabemos, longe de serem lineares ou cartesianos, os caminhos das idéias econômicas são demarcados por armadilhas e chincadas; são vias freqüentemente sinuosas e que apresentam obstáculos explícitos e implícitos. O pensamento econômico marcha de modo trepidante, hesita, refluxa e faz longos *detours*. Muitas vezes esse caminhar não é guiado por intuições promissoras. Para alguns, são essas dificuldades na busca de um maior conhecimento do mundo real que fazem da atividade do pesquisador algo intelectualmente estimulante. Sendo a Teoria Econômica uma ciência ainda adolescente, é necessário que se faça uma ampla reflexão no traçar dos caminhos a serem percorridos. Não conhecemos *a priori* o raio de von Neumann e os *turnpikes*. Também não são abundantes os marcos de excelência acadêmica na História das Idéias Econômicas. É óbvio que von Neumann conhecia as dificuldades de seu modelo que, apesar das limitações, é uma referência destacada.

#### NOTAS

1. O teorema do ponto fixo de Brouwer mostra que o mapeamento contínuo de um conjunto convexo fechado e limitado em si mesmo, no espaço euclidiano n-dimensional, tem um ponto fixo. Segundo Nicola (1987: 219), hoje sabemos que não era necessário a von Neumann utilizar uma generalização desse teorema para obter a prova da existência de solução. Bastava o teorema de Minkowski.
2. Chakravarty (1969) apresenta uma interessante discussão de vários modelos “à la von Neumann”, caracterizados pelo enfoque de uma economia em expansão uniforme.

3. Os insumos requeridos pelos diferentes processos são representados por um vetor-linha da matriz  $A$ . Assim, se existem duas atividades e dois processos, tal matriz tem a forma  $\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$ , e a matriz  $B$  do produto é representada de modo análogo. De modo mais geral,  $A$  é uma matriz com  $m$  linhas e  $n$  colunas, onde as linhas indicam as atividades.
4. Para muitos, a abordagem de Marx representa o aspecto econômico de uma filosofia da história, e não uma teoria econômica voltada para si mesma. Existe, no entanto, uma distinção entre *marxistas* (que compartilham o conjunto dos pressupostos de Marx), os *marxianos* (que aceitam uma parte dos mesmos) e os *marxólogos* (que, embora não compartilhem a visão, têm interesse nos trabalhos de Marx, como é o caso de Schumpeter).
5. Deve ficar claro que desenvolvimento econômico envolve essencialmente esses dois problemas. A utilização de recursos trata da explicação do “misterioso” grau de coerência que pode ser observado, em períodos normais, emergir do movimento aparentemente anárquico em economias de mercado. A criação de recursos explica como decisões quanto ao uso dos “fatores de produção” afetam o desempenho do sistema econômico. A distribuição dos recursos da produção está presente.

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BIDARD, C. (1991) *Prix, reproduction, rareté*. Paris: Dunod.
- CHAKRAVARTY, S. (1969) *Capital and Development Planning*. Cambridge, Mass.: The M. I. T. Press.
- CHAMPERNOWNE, D. (1945) “A note on J. von Neumann’s article”. *Review of Economic Studies*, n. 13.
- DORFMAN, R., SAMUELSON, P., SOLOW, R. (1958) *Linear Programming and Economic Analysis*. Nova York: MacGraw-Hill.
- GALE, D. (1956) “The closed linear model of production”. In: H. Kuhn e A. Tucker (orgs.), *Linear Inequalities and Related Systems*. Princeton: Princeton University Press.
- GEORGE, D. (1988) *Mathematical Modelling for Economists*. Londres: Macmillan Education Ltd.
- KALDOR, N. (1955) “Alternative theories of distribution”. *Review of Economic Studies*, n. 23.
- KARLIN, S. (1959) *Mathematical Methods and the Theory in Games, Programming and Economics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley.
- KEMENY, J., MORGENSTERN, O., THOMPSON, G. (1956) “A generalization of von Neumann’s model of an expanding economy”. *Econometrica*, n. 24.
- KURZ, H., SALVADORI, N. (1997) “Von Neumann’s growth model and the ‘classical’ tradition”. In: J. Teixeira (org.), *Issues in Modern Political Economy*. Brasília: Universidade de Brasília.
- LEONTIEF, W. (1951) *The Structure of the American Economy, 1919-1939*. Nova York: Oxford University Press.
- LOMBARDINI, S., NICOLA, P. (1974) “Income distribution and economic development in Ricardian and Walrasian Models”. In: *Proceedings of the II Polish-Italian Conference on*

- Applications of Systems Theory to Economy Management and Technology*. Pugnochio: Il Mulino.
- LÖS, J. (1974) “The existence of equilibrium in an open expanding economy model (generalization of Morgenstern-Thompson model)”. In: J. e M. Løs (orgs.), *Mathematical Models in Economics*. Amsterdam: North-Holland Publishing Co.
- MOESCHLIN, O. (1974) “A generalization of the open expanding economy model”. *Econometrica*, n. 45.
- , THOMPSON, G. (1969) “An open expanding economy model”. *Naval Research Logistics Quarterly*, n. 16.
- , ———. (1976) *Mathematical Theory of Expanding and Contracting Economies*. Boston: Heath-Lexington.
- MORISHIMA, M. (1964) *Stability, Equilibrium and Growth*. Cambridge: Cambridge University Press.
- . (1973) *Marx's Economics. A Dual Theory of Value and Growth*. Cambridge: Cambridge University Press.
- MURAKAMI, Y., TOKOYAMA, A., TSUKUI, Y. (1976) “Efficient paths of accumulation and the turnpike of the Japanese economy”. In: A. Carter e A. Brody (orgs.), *Applications of Input-output Analysis*. Amsterdam: North-Holland Publisher.
- NICOLA, P. (1976) *Lezioni di Dinamica Economica*. Bolonha: Il Mulino.
- . (1987) “Il modello di von Neumann e la teoria del valore”. In: L. Pasinetti, *Aspetti controversi della teoria del valore*. Bolonha: Il Mulino.
- PASINETTI, L. (1962) “Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth”. *Review of Economic Studies*, n. 29.
- . (1993) *Structural Economic Dynamics. A Theory of the Economic Consequences of Human Learning*. Cambridge: Cambridge University Press.
- PIAGET, J. (1967) *Biologie et connaissance*. Paris: Gallimard.
- ROMER, P. (1995) “Comment on T. N. Srinivasan's Paper”. In: I. Takatoshi e A. Krueger (orgs.), *Growth Theories in the Light of the East Asian Experience*. Chicago: University of Chicago Press.
- SAMUELSON, P., MODIGLIANI, F. (1966) “The Pasinetti paradox in neoclassical and more general model's”. *The Review of Economic Studies*, n. 33.
- SCHEFOLD, B. (1988) “The dominant technique in joint production systems”. *Cambridge Journal of Economics*, n. 12.
- SCHEFOLD, B. (1998) “Piero Sraffa”. In: F. Meacci (org.), *Italian Economists of the 20<sup>th</sup> Century*. Cheltenham: Edward Elgar Publishing Limited.
- SRAFFA, P. (1960) *Production of Commodities by Means of Commodities*. Cambridge: Cambridge University Press.
- TEIXEIRA, J. (1998) “Luigi L. Pasinetti”. In: F. Meacci (org.), *Italian Economists of the 20<sup>th</sup> Century*. Cheltenham: Edward Elgar Publishing Limited.
- THOMPSON, G. (1987) “Von Neumann (1903-1957)”. In: J. Eatwell, M. Milgate e P. Neuman (orgs.), *The New Palgrave: a dictionary of economics*, v. 4. Londres: The Maxmillan Press Limited.
- VON NEUMANN, J. (1945) “A model of general equilibrium”. *Review of Economic Studies*, n. 13.