# MODELO DE KIYOTAKI E WRIGHT:
## UMA VERSÃO DE ECONOMIA CLÁSSICA*

*Eleutério F. S. Prado*
Universidade de São Paulo – USP, Departamento de Economia – FEA II
Av. Prof. Luciano Gualberto, 908, CEP 05508-900, São Paulo, SP, Brasil
e-mail: eleuter@usp.br

**RESUMO** Reconstruímos aqui o modelo de troca bilateral descentralizada de Kiyotaki e Wright como um jogo evolucionário, adotando uma perspectiva teórica de economia política clássica. A produção está localizada no tempo e depende da flecha do tempo. É a transformação de recursos naturais em produtos sociais, de um modo que depende crucialmente do papel ativo do trabalho vivo. O único fator escasso é a tecnologia. A racionalidade dos agentes é severamente limitada, de tal modo que os resultados coletivos das ações individuais emergem cegamente. As populações de agentes são grandes e os comportamentos estratégicos são tratados por meio de dinâmicas de replicação. Além de dinâmicas de estoques e de estratégias, o modelo considera também uma dinâmica populacional por meio da qual os agentes escolhem seus tipos. O modelo evolucionário se expressa por um conjunto de equações diferenciais não lineares.

**Palavras-chave:** jogo evolucionário, racionalidade limitada, modelos de trocas bilaterais, modelo de Kiyotaki-Wright

### THE KIYOTAKI AND WRIGHT MODEL: A VARIANT OF CLASSICAL ECONOMICS

**ABSTRACT** We reconstruct Kiyotaki-Wright model of decentralized bilateral exchange as an evolutionary game and, for that, we adopt a classical political economy perspective. Production process is located in time and it depends on the arrow of time. It is transformation of natural resources into social products in such way that relies on the active role of live labor. Technology is the unique scarce factor

* Este artigo foi elaborado com o apoio de bolsa de pesquisa do CNPq.

of production. The agent's rationality is severely bounded and, as a consequence, the collective results of individual actions emerge blindly. Populations are large and, in consequence, the strategic behavior of agents can be represented by replicator dynamics. Apart from dynamics of inventories and strategies, we consider a population dynamics by means of what agents choose their type. From a mathematical point of view, the evolutionary model is a set of non-linear differential equations.

**Key words:** evolutionary game, bounded rationality, bilateral exchange model, Kiyotaki-Wright model

## INTRODUÇÃO

O presente artigo está construído sobre a estrutura básica do modelo de Kiyotaki e Wright (Kiyotaki e Wright, 1989, 1991, 1993), o qual vem a ser um momento notável no processo de desenvolvimento de um modo esquemático de conceber o mercado, cujas origens remontam a Smith e Marx. Essa estrutura, constituída por um mercado bilateral em que a troca direta não é em geral possível, pode ser encontrada já em Menger e Jevons (Ostroy e Starr, 1990). Em conseqüência, a coordenação dos agentes, assim como a própria formação do mercado como tal, requer o aparecimento de um meio de circulação. A coincidência da vontade de trocar só pode ocorrer aí se uma das mercadorias que podem ser transacionadas no mercado se transformar, temporária ou permanentemente, em moeda.

O modelo de Kiyotaki e Wright simula uma economia formada por indivíduos que se especializam na produção e no consumo e que, para sobreviver, têm de transacionar. As trocas são sempre bilaterais e *quid pro quo* e os encontros, que ocorrem com a passagem do tempo, são aleatórios. Certas mercadorias emergem endogenamente como meio de troca dependendo de suas características e das expectativas dos agentes. O modelo é tratado como um jogo dinâmico e as soluções encontradas coincidem com os equilíbrios de Nash. O seu objetivo principal é mostrar o aparecimento da moeda mercadoria, mas Kiyotaki e Wright consideram também a possibilidade da coordenação mercantil ser feita por meio de moeda-papel.

Na busca da solução do modelo, esses dois autores mostram que uma ou mais de uma mercadoria podiam atuar como moeda e que isto dependia dos custos relativos de manutenção de estoques. Mostraram também que, em função desses custos, podia haver equilíbrio único ou múltiplo. Ademais, provaram que os equilíbrios alcançados não eram geralmente ótimos no sentido de Pareto e que a introdução da moeda-papel melhorava o bem-estar da população.

Após a publicação dos artigos de Kiyotaki e Wright, outros procuraram explorar suas potencialidades analíticas, mantendo o contexto teórico que requer soluções por programação dinâmica. Como no modelo original havia três populações de tamanho fixo, Wright, por exemplo, permitiu que as suas dimensões relativas pudessem variar, fazendo com que os agentes pudessem escolher o próprio tipo (Wright, 1995). Aiyagari e Wallace ampliaram o modelo para um número finito qualquer de mercadorias, incluindo também a possibilidade de que as transações pudessem ser mediadas por moeda-papel (Aiyagari e Wallace, 1991, 1992).

Outros artigos conservaram a estrutura do modelo de Kiyotaki e Wright, mas modificaram a sua contextura teórica: em vez de jogo de equilíbrio dinâmico, passaram a empregar jogo evolucionário. Sethi resolveu o modelo de Kiyotaki e Wright sob a suposição de que os agentes são dotados de racionalidade limitada e empregam estratégias de um modo que pode ser sintetizado em dinâmicas de replicação (Sethi, 1999). Marimon, McGrattan e Sargent, por exemplo, modelaram os agentes por meio de uma das técnicas de inteligência artificial, fazendo com que pudessem tomar decisões empregando os chamados sistemas classificadores. Gintis, por sua vez, tratou a dinâmica da economia como um processo markoviano, empregando o teorema ergódigo para provar a existência de equilíbrios (Gintis, 1996).

O artigo aqui desenvolvido tem como objetivo, tal como o de Sethi acima mencionado, reconstruir o modelo de Kiyotaki e Wright como um jogo evolucionário, adotando diferentemente dele, porém, a perspectiva teórica da economia clássica, principalmente no tratamento da produção e do bem-estar. Assim, o *payoff* que orienta os agentes não será medido em utilidade, mas como realização do trabalho investido na produção de mercadoria. A própria produção não será modelada por meio de uma função que transforma quantidades de fatores de produção em quantidades de produto, mas como uma determinada combinação datada de recursos naturais que depende da disponibilidade de tecnologia (esta última é o único fator escasso) e do papel ativo do trabalho vivo.[1]

Os agentes são severamente limitados em matéria de racionalidade instrumental, de tal modo que os resultados coletivos das ações individuais emergem cegamente. As trocas são bilaterais e os encontros são aleatórios e independentes entre si. Supomos que as populações são grandes e que os comportamentos dos agentes na escolha de estratégias são traduzíveis, no agregado, como dinâmicas diferenciais de replicação. Consideramos os tamanhos das populações como variáveis, introduzindo uma dinâmica de tipos tal como no artigo mencionado de Wright. De um ponto de vista matemático, o modelo se expressa por um conjunto de equações diferenciais não lineares, cujo comportamento é estudado analiticamente.

## 1. PRODUÇÃO E CONSUMO

No modelo aqui construído as estruturas de preferências, produção e interação são basicamente as mesmas do modelo de Kiyotaki e Wright. Há três grandes populações formadas, cada uma delas, por agentes do mesmo tipo. Há, pois, três tipos de agentes e eles são designados genericamente pela variável discreta "$i$" – $i = 1$, 2 ou 3, módulo 3. Os agentes do tipo $i$ produzem mercadorias específicas, as quais são denominadas, de modo semelhante, pela variável "$i + 1$". Os agentes do tipo $i$, por outro lado, consomem apenas os bens do tipo $i$, de tal modo que uma troca bilateral não é de início possível.

Cada vez que um agente do tipo $i$ consegue adquirir uma unidade de $i$, ele imediatamente a consome, passando a produzir uma unidade de $i + 1$. A produção demora sempre, no máximo, um período unitário e o agente gasta, durante esse período, um certo tempo de trabalho. Faremos abstração da existência de divisão do trabalho no interior dos processos produtivos.

O processo de produção encontra-se localizado no tempo e é considerado irrevogável: tem duração, permanece ou muda, de período para período.[2] Em vez de tratar a produção como uma função que relaciona fatores a produtos, seguindo uma sugestão encontrada em Potts (2000), ela será modelada com um grafo orientado $g_{i+1} = (v_{i+1}, e_{i+1})$, onde $g_{i+1}$ representa a produção de uma unidade de $i + 1$, $v_{i+1}$ é um vetor das quantidades de recursos necessárias à produção dessa unidade de $i + 1$ e $e_{i+1}$ é um vetor que representa as conexões tecnológicas que ligam os elementos de $v_{i+1}$. A representação da produção por meio de um grafo orientado (o qual nada mais é aqui do que uma forma abstrata do processo) não deve esconder o fato de que essas conexões são altamente heterogêneas. Ademais, essas conexões também estão no tempo, acompanham umas às outras, às vezes em paralelo e às vezes em seqüência.

Por simplicidade, admitiremos que todos os recursos empregados são obtidos diretamente da natureza; ou seja, não consideraremos a existência de quaisquer meios de produção produzidos. Suporemos, também, que esses recursos não são escassos e que eles não podem ser empregados diretamente no consumo. Na concepção de produção aqui adotada o fator escasso é a tecnologia; dito de outro modo, o que limita a produção vem a ser a disponibilidade de conjuntos determinados de conexões por meio dos quais os recursos existentes na natureza podem ser transformados em valores de uso. É evidente, por outro lado, que aquilo que é produzido tem valor de uso se for útil para alguém, se for demandado.

Em geral, a geração de bens e serviços úteis requer sempre, além dos recursos obtidos diretamente da natureza,[3] meios de produção produzidos, trabalho humano e conhecimento tecnológico. Este último encontra-se incorporado nos meios de produção, nos procedimentos operacionais do processo produtivo e na subjetividade dos trabalhadores. O problema central da produção é escolher as tecnologias a serem empregadas, o que envolve uma combinação apropriada dos elementos acima especificados, assim como dos modos adequados de combiná-los, nas dimensões do espaço e do tempo. Para transformar recursos em valores de uso, entretanto, é preciso o concurso do trabalho, que é aqui considerado como o elemento ativo e criador do processo de produção. É o trabalho vivo que estabelece efetivamente, na prática, as conexões necessárias para que os bens e serviços possam ter existência social.

Em cada momento do tempo, apenas uma tecnologia é empregada. Os agentes produtivos que povoam o modelo, em princípio, podem pesquisar e experimentar novas tecnologias conforme passa o tempo. Eles podem descobrir novos recursos naturais ou novas formas de empregar os recursos naturais. Eles podem encontrar novas maneiras de combinar esses recursos etc. Podemos supor, também, que selecionam e adotam essas novas formas quando elas implicam redução de custo ou, o que é o mesmo, economia de trabalho.

Ainda que o processo de produção, na concepção aqui adotada, seja inerentemente dinâmico do ponto de vista tecnológico, como estamos interessados apenas em focar o funcionamento do mercado, colocaremos esse dinamismo entre parênteses,[4] supondo que as tecnologias empregadas na produção de cada um dos bens permanecem sempre as mesmas. Dito em outras palavras, as mesmas tecnologias são utilizadas em todos os momentos do tempo, caracterizando o que Marx denominou reprodução simples. Indicaremos por $l_i$ a quantidade de trabalho necessária para produzir a mercadoria $i + 1$.

No modelo aqui desenvolvido, a conexão entre a geração do produto $i + 1$ pelos indivíduos do tipo $i$ e o consumo desse bem pelos indivíduos do tipo $i + 1$ só pode feita com a mediação do mercado. Supomos, entretanto, que não existe desconformidade qualitativa entre produção e consumo: a escolha da tecnologia, pois, é simplesmente consistente com a preferência. Poderá haver, entretanto, discrepância entre as quantidades ofertadas e demandadas, fora do equilíbrio. De modo conceitual, consideramos a preferência não como uma relação binária completa entre cestas de bens no $\Re^n$, as quais existiriam previamente à escolha, mas como cestas de escolha efetiva que mudam com a experiência do consumidor, ao longo do tempo. É importante perceber que, segundo esse modo de conceber as preferências, a demanda por bens específicos é inerentemente saciável.

Antes de passar à consideração do mercado como tal, devemos enfatizar que as preferências por bens de consumo e as tecnologias de produção são pensadas aqui exatamente do mesmo modo. Isto é, ambas dependem de um processo prévio de busca e são, portanto, um resultado historicamente alcançado por meio da experiência.

## 2. MERCADO

No modelo, toda produção é produção de mercadoria. Os agentes produzem para o mercado, visando obter o bem que consomem por meio de transações. Com a finalidade de trocar, cada um deles mantém em estoque apenas uma unidade de mercadoria. Em conseqüência, no estoque de um agente do tipo $i$ pode haver uma unidade de mercadoria $i + 1$ ou uma unidade de mercadoria $i + 2$.

As três populações são constituídas por agentes limitados racionalmente que optam entre duas estratégias em função de seus retornos relativos. A estratégia $\alpha$ implica que os agentes do tipo $i$ só aceitam o bem $i$, que consomem, em troca de $i + 1$ que produzem. Segundo a estratégia $\beta$, eles aceitam tanto o bem $i$ que consomem quanto o bem $i + 2$ que pretendem empregar como meio de transação. As estratégias disponíveis, os estoques mantidos pelos agentes individualmente e as frações da população em cada situação estão organizados na tabela 1.

**Tabela 1**

| Estratégias | Estoques | Frações populacionais |
|---|---|---|
| $i\alpha$ | $i + 1$ | $1 - s_i$ |
| $i\beta$ | $i + 1$ | $p_i$ |
| $i\beta$ | $i + 2$ | $s_i - p_i$ |

Em cada momento do tempo, a composição de cada uma das três populações é descrita pelo vetor $s = (s_1, s_2, s_3)$, onde $s_i$ representa a fração que está disposta a aceitar a mercadoria $i + 2$ nas transações. A fração $(1 - s_i)$ denota, pois, a parte da população $i$ que só aceita $i$ em troca de $i + 1$. O vetor $p = (p_1, p_2, p_3)$ representa a distribuição dos estoques em cada momento do tempo; os $p_i$ respondem pelas proporções dos subtipos $i\beta$ que mantêm $i + 1$ em estoque. A fração $(s_i - p_i)$ indica, em conseqüência, a proporção dos subtipos de $i\beta$ que mantém $i + 2$ em estoque.

Os agentes se encontram aleatoriamente aos pares, transacionando quando isto for do interesse mútuo. Cada indivíduo dessas três populações faz um encontro por período de tempo e as transações, quando se efetivam, ocorrem no final desse período. Um mapa completo dos encontros possíveis encontra-se na tabela 2. Os encontros em que ocorrem transações, assim como as probabilidades associadas a eles, estão aí registrados. Em cada expressão das duas primeiras colunas da tabela 2, o símbolo da esquerda designa o tipo, o símbolo do meio mostra a estratégia adotada pelo tipo (contribuindo, assim, para designar o subtipo) e o da direita apresenta o estoque mantido pelo subtipo com a finalidade de participar do mercado.

Quando um agente $i\beta[i + 1]$ encontra um agente $(i + 1)\beta[i + 2]$ — e isto ocorre com probabilidade $\theta_{i+1}\, p_{i+1}$ —, há transação: o primeiro entrega $i + 1$ para o segundo e recebe dele uma unidade de $i + 2$, mudando assim de subtipo. O mesmo ocorre quando ele encontra um agente $(i + 1)\alpha[i + 2]$, com a freqüência $\theta_{i+1}\,(1 - s_{i+1})$. Em ambos os casos, ele se transforma num agente do tipo $i\beta[i + 2]$. Agora, quando um agente $i\beta[i + 2]$ encontra um agente $(i + 2)\beta[i]$ — e isto acontece com probabilidade $\theta_{i+2}\, p_{i+2}$ —, ele entrega uma unidade de $i + 2$ para o outro, recebendo dele uma unidade de $i$ que consome, produzindo então uma unidade de $i + 1$. O mesmo ocorre quando ele encontra um agente do tipo $(i + 2)\alpha[i]$, com freqüência $\theta_{i+2}(1 - s_{i+2})$. Eis que tudo isso gera o circuito de transações apresentado na figura 1.

**Tabela 2**[5]

| Subtipos de $i$ | Subtipos encontrados | Probabilidades de transação |
|---|---|---|
| $i\alpha[i+1]$ | $i\alpha[i+1]$ | 0 |
| $i\alpha[i+1]$ | $i\beta[i+1]$ | 0 |
| $i\alpha[i+1]$ | $i\beta[i+2]$ | 0 |
| $i\alpha[i+1]$ | $(i+1)\alpha[i+2]$ | 0 |
| $i\alpha[i+1]$ | $(i+1)\beta[i+2]$ | 0 |
| $i\alpha[i+1]$ | $(i+1)\beta[i]$ | $\theta_{i+1}(s_{i+1}-p_{i+1})$ |
| $i\alpha[i+1]$ | $(i+2)\alpha[i]$ | 0 |
| $i\alpha[i+1]$ | $(i+2)\beta[i]$ | $\theta_{i+2}p_{i+2}$ |
| $i\alpha[i+1]$ | $(i+2)\beta[i+1]$ | 0 |
| $i\beta[i+1]$ | $i\alpha[i+1]$ | 0 |
| $i\beta[i+1]$ | $i\beta[i+1]$ | 0 |
| $i\beta[i+1]$ | $i\beta[i+2]$ | 0 |
| $i\beta[i+1]$ | $(i+1)\alpha[i+2]$ | $\theta_{i+1}(1-s_{i+1})$ |
| $i\beta[i+1]$ | $(i+1)\beta[i+2]$ | $\theta_{i+1}p_{i+1}$ |
| $i\beta[i+1]$ | $(i+1)\beta[i]$ | $\theta_{i+1}(s_{i+1}-p_{i+1})$ |
| $i\beta[i+1]$ | $(i+2)\alpha[i]$ | 0 |
| $i\beta[i+1]$ | $(i+2)\beta[i]$ | $\theta_{i+2}p_{i+2}$ |
| $i\beta[i+1]$ | $(i+2)\beta[i+1]$ | 0 |
| $i\beta[i+2]$ | $i\alpha[i+1]$ | 0 |
| $i\beta[i+2]$ | $i\beta[i+1]$ | 0 |
| $i\beta[i+2]$ | $i\beta[i+2]$ | 0 |
| $i\beta[i+2]$ | $(i+1)\alpha[i+2]$ | 0 |
| $i\beta[i+2]$ | $(i+1)\beta[i+2]$ | 0 |
| $i\beta[i+2]$ | $(i+1)\beta[i]$ | 0 |
| $i\beta[i+2]$ | $(i+2)\alpha[i]$ | $\theta_{i+2}(1-s_{i+2})$ |
| $i\beta[i+2]$ | $(i+2)\beta[i]$ | $\theta_{i+2}p_{i+2}$ |
| $i\beta[i+2]$ | $(i+2)\beta[i+1]$ | 0 |

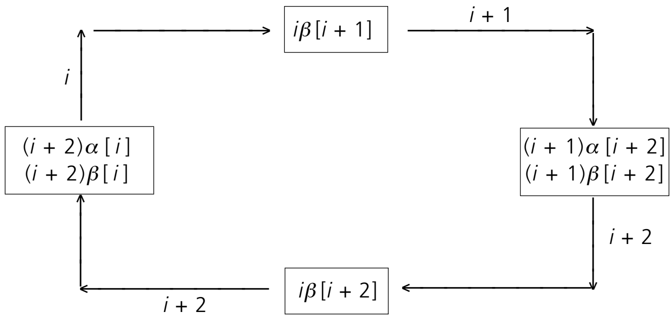
A repetição e o entrelaçamento de circuitos como este no nível microssocial gera uma dinâmica de estoques no nível macrossocial, a qual pode ser apresentada por meio das seguintes equações diferenciais:

$$\dot{p}_i = \theta_i\theta_{i+2}(s_i - p_i)(1 - s_{i+2} - p_{i+2}) - \theta_i\theta_{i+1}(1 - s_{i+1} + p_{i+1})$$

Além da dinâmica de estoques, há também uma dinâmica de estratégias. Esta depende da avaliação dos agentes sobre os resultados das atividades de produção e consumo.

Da perspectiva do seu próprio bem-estar, cada indivíduo da população $i$ avalia a produção da mercadoria $i + 1$ com um esforço cuja recompensa é a obtenção do bem $i$ que consome. Admitiremos, por isso, que todos esses

**Figura 1**




indivíduos atribuem um valor exatamente igual a $l_i$ à obtenção de seu bem de consumo. A obtenção do *payoff* significa, pois, a realização do valor criado na produção da mercadoria $i + 1$ com a finalidade de obter o bem $i$. Nem sempre, entretanto, conseguem vender imediatamente a mercadoria produzida, tendo, por isso, de gastar esforço na manutenção de estoques. Suporemos que consideram esse dispêndio de trabalho associado ao funcionamento do mercado como um custo irrecuperável. Atribuem, por isso, um valor negativo ao esforço para manter $i + 1$ em estoque, indicando esse custo por $c_{i+1}$.

Cada agente do subtipo $i$ pode comparar o *payoff* que obteve num certo momento com o *payoff* obtido por um outro agente da sua própria população.[6] Se o seu *payoff* for maior ou igual ao do outro, ele não muda de estratégia; se, porém, o seu *payoff* for menor, ele opta com uma certa probabilidade pela outra estratégia. Assim, um agente do subtipo $\alpha$ pode se transformar num agente do subtipo $\beta$ — e vice-versa. Na teoria de jogos evolucionários, foi demonstrado que esse processo microssocial de imitação dinâmica gera uma dinâmica macrossocial que recebe o nome de dinâmica de replicação (*replicator dynamics*) (Vega-Redondo, 1996, p. 89-90). Em conseqüência dessa dinâmica, cada uma das populações evolve no tempo, de tal modo que as frações populacionais que obtêm melhores retornos crescem, e as que obtêm retornos menores decrescem. Esses retornos encontram-se medidos por meio de *payoffs* que expressam, tal como na literatura econômica em geral, graus de bem-estar. Essas dinâmicas têm a seguinte forma:

$$\dot{s}_i = (1 - s_i)\, s_i [U_{i\beta} - U_{i\alpha}]$$

Os *payoffs* das estratégias $\alpha$ e $\beta$, respectivamente $U_{i\alpha}$ e $U_{i\beta}$, assumem as seguintes formas:

$$U_{i\beta} = \frac{p_i}{s_i} U_{i\beta[i+1]} + \frac{s_i - p_i}{s_i} U_{i\beta\,[i+2]}$$

$$U_{i\alpha} = U_{i\beta[i+1]} = \theta_{i+1}(s_{i+1} - p_{i+1})\, l_i + \theta_{i+2}\, p_{i+2} l_i - c_{i+1}$$

$$U_{i\beta[i+2]} = \theta_{i+2}(1 - s_{i+2} + p_{i+2})\, l_i - c_{i+2}$$

Finalmente, dado que as frações $\theta_i$ são variáveis que devem também ser determinadas, precisamos considerar uma dinâmica populacional. Faremos isto também por meio de uma dinâmica de replicação:

$$\dot{\theta}_i = (1 - \theta_i)\, \theta_i (C_i - \bar{C}), \text{ onde}$$

$$C_i = \frac{\theta_{i+1}}{l_i} \quad \text{e} \quad \bar{C} = \frac{1}{3}\left(\frac{\theta_1}{l_1} + \frac{\theta_2}{l_2} + \frac{\theta_3}{l_3}\right)$$

Estamos supondo, ao escrever a equação dinâmica acima que os indivíduos mudam de tipo procurando melhorar a sua capacidade de sobrevivência, orientados pelo *payoff* $C_i$ acima explicitado. Todos eles, pois, produzem por necessidade, procurando minimizar o esforço $l_i$ na produção de $i + 1$ e, ao mesmo tempo, buscando maximizar a probabilidade de encontrar comprador para a mercadoria produzida — o que se expressa na variável $\theta_{i+1}$. Assim, se $C_i > \bar{C}$, os agentes dos tipos $i + 1$ e $i + 2$ vão preferir se transformar em agentes do tipo $i$; em caso contrário, são os agentes do tipo $i$ que vão querer mudar de tipo.[7]

### 3. SOLUÇÃO DO MODELO

O modelo apresentado é formado por três ternos de equações diferenciais, os quais respondem, como vimos, pelas dinâmicas de estoque, de estratégias e populacionais. Para resolvê-lo, com base em características muito particulares desse sistema, adotaremos um método analítico que emprega um procedimento gráfico.[8]

Notemos, de início, que o subsistema das dinâmicas de estratégias admite soluções puramente monomórficas, as quais ocorrem quando os indivíduos de cada uma das três populações adotam todos uma das duas estratégias $\alpha$ ou $\beta$. Dito de outro modo, esse subsistema pode ter um ponto estacionário da seguinte forma: $(s_1, s_2, s_3)$, onde $s_i = 0$ ou $s_i = 1$. Por outro lado, esse subsistema pode ter também soluções polimórficas, as quais ocorrem quando um ou mais de um dos $s_i$ estão situados entre zero e um.

O simplex, associado ao subsistema das dinâmicas de estratégias, tem oito pontos extremos, e estes correspondem ao universo dos pontos candidatos a serem soluções monomórficas. Assumiremos, sem grande perda de generalidade, que $c_1 < c_2 < c_3$ — eis que em muitos casos é possível nomear de novo as populações de tal modo a recair nesse caso.[9] Como mostramos no apêndice matemático, entre esses oito, apenas os seguintes pontos são admissíveis como soluções (ou seja, pontos estacionários assintoticamente estáveis): (0, 1, 0), (1, 1, 0) e (0, 0, 1). Ademais, mostramos também aí que as únicas soluções polimórficas possíveis têm a forma $(x, 1, 0)$, onde $0 < x < 1$.

Na figura 2, supondo que $c_1 = 0{,}01$, $c_2 = 0{,}04$ e $c_3 = 0{,}07$ e que $l_1 = l_2 = l_3 = 1$ — e com base nas restrições obtidas no apêndice —, mapeamos todas as soluções do subsistema de equações diferenciais formado pelas dinâmicas de estoques e de estratégias.[10] O mapa das soluções é apresentado na projeção triangular do simplex $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$ no plano $\theta_1\theta_2$.

**Figura 2**

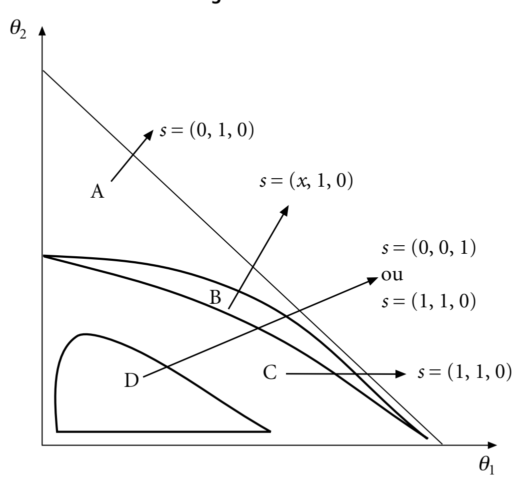
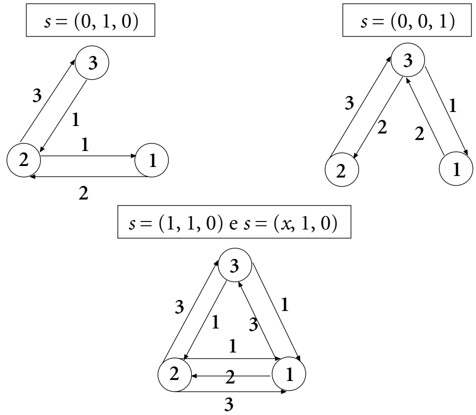


**Figura 3**

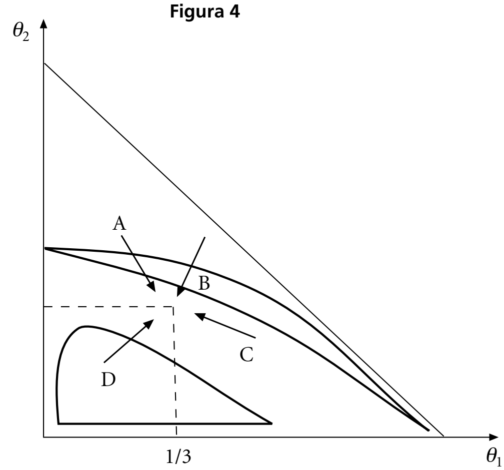



Dependendo, pois, do vetor $\theta$, temos várias possibilidades na figura 2. Na região *A*, há apenas uma moeda mercadoria, qual seja, a mercadoria 1 que é aquela de menor custo de estocagem. Na região *C*, duas mercadorias atuam simultaneamente como moeda para fazer as mediações das transações, quais sejam, 1 e 3. Na região *D*, há dois equilíbrios possíveis, dependendo das condições iniciais; nesse caso, pode haver, pois, uma ou duas moedas mercadorias. Nessa região, o modelo apresenta a propriedade da dependência de trajetória (que equivale, num modelo estocástico, à não-ergocidade). Na região *B*, finalmente, há duas moedas e a população 1 é polimórfica. Os três dígrafos da figura 3 ilustram cada um desses casos.

Precisamos considerar, agora, o subsistema das dinâmicas populacionais. Notemos que esse subsistema é independente dos demais, já que as suas equações estabelecem relações funcionais apenas dos próprios $\theta_i$. Sob a suposição de que os $l_i$ são todos iguais a 1, o único ponto estacionário desse subsistema de equações diferenciais ocorre quando os $\theta_i$ se tornam iguais a 1/3. A figura 4 ilustra a dinâmica em torno desse ponto estacionário.[11] Com a dinâmica populacional acima definida, a economia estaciona na área *C*, o que indica que ela terá duas moedas, a saber 1 e 3.

Supusemos que $l_1 = l_2 = l_3 = 1$. Se houvéssemos optado por outros valores — arbitrariamente ou por efeito da existência de progresso técnico que economizasse trabalho —, teríamos obtido resultados muitos semelhantes do ponto de vista analítico. Teríamos chegado, evidentemente, a fronteiras que delimitam as áreas *A*, *B*, *C* e *D* algo diferentes daquelas que obtivemos.

**Figura 4**




## 4. Conclusão

Desenvolvemos neste texto um modelo de desequilíbrio geral evolucionário que ressalta certas características sistêmicas da economia mercantil. Ele apresenta de uma forma estilizada o aparecimento de uma ou mais do que uma moeda mercadoria numa economia em que as transações são bilaterais e *quid pro quo*. Além de mostrar os vários tipos de equilíbrios que podem ser alcançados, ele mostra também que isto depende do custo de estocagem da moeda e do tamanho relativo das populações. Ademais, nesse modelo evolucionário de trocas descentralizadas, o aparecimento da moeda mercadoria é concomitante com a própria formação do mercado enquanto tal, o que de certo modo contraria aquilo que é usualmente assumido nos modelos de equilíbrio geral.[12]

No modelo aqui analisado, certas mercadorias atuam como moeda temporariamente, exercendo as funções de meio de troca e reserva de valor de modo alternado no tempo. A sua característica principal consiste no fato de que estabelece a equivalência geral das mercadorias e torna possível a existência do mercado.[13] A moeda é aqui, pois, a linguagem das mercadorias.

São os agentes econômicos que produzem esses resultados, mas eles o fazem cegamente, já que são dotados de racionalidade instrumental limitada e não são capazes de calcular as conseqüências coletivas de suas ações. Dito de outro modo, o surgimento da moeda mercadoria é um fenômeno emergente no nível macroeconômico que tem um fundamento microeconômico explícito. Ao contrário do que ocorre nos modelos baseados em otimização, no modelo aqui desenvolvido o sistema econômico tende para o equilíbrio processualmente, operando na maior parte do tempo fora do equilíbrio.

## 5. APÊNDICE MATEMÁTICO

Investigamos, aqui, as soluções do sistema completo de equações diferenciais definido no corpo do artigo. Consideremos em primeiro lugar os pontos que dão origem, eventualmente, a soluções monomórficas no subsistema das dinâmicas de estratégias; eles têm, como vimos, a seguinte forma: $(s_1, s_2, s_3)$, onde $s_i = 0$ ou $s_i = 1$. Notemos, então, que para cada um deles corresponde um único vetor de solução no subsistema das dinâmicas de estoque.

Se $s = (0, 0, 0)$, então $p = (0, 0, 0)$

Se $s = (0, 1, 0)$, então $p = \left(0, \dfrac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_3}, 0\right)$

Se $s = (1, 0, 0)$, então $p = \left(\dfrac{\theta_3}{\theta_2 + \theta_3}, 0, 0\right)$

Se $s = (0, 0, 1)$, então $p = \left(0, 0, \dfrac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2}\right)$

Se $s = (1, 1, 0)$, então $p = \left(\dfrac{-\theta_3\,(\theta_1 - \theta_3 + \sqrt{\phi_1})}{2\theta_1\,(\theta_1 - 1)}, \dfrac{\theta_2 - 1 + \sqrt{\phi_1}}{2\theta_2}, 0\right)$

onde $\phi_1 = \sqrt{(1 - \theta_2)^2 + 4\,\theta_1\theta_2}$

Se $s = (0, 1, 1)$, então $p = \left(0, \dfrac{\theta_1\,(\theta_1 - \theta_2 + \sqrt{\phi_2})}{2\,(\theta_2 - 1)\theta_2}, \dfrac{\theta_1 + \theta_2 - \sqrt{\phi_2}}{2(\theta_1 + \theta_2 - 1)}\right)$

onde $\phi_2 = \sqrt{\theta_1^2 - 2\theta_1\theta_2 + (4 - 3\theta_2)\theta_2}$

Se $s = (1, 0, 1)$, então $p = \left( \dfrac{-1 + \theta_1 + \sqrt{\phi_3}}{2\,\theta_1},\ 0,\ \dfrac{\theta_2\,(-1 + \theta_1 + 2\theta_2 - \sqrt{\phi_3})}{2\,(\theta_1 + \theta_2 - 1)(\theta_1 + \theta_2)} \right)$

onde $\phi_3 = \sqrt{1 + 2\theta_1 - 3\theta_1^2 + 4\theta_1\theta_2}$

Se $s = (1, 1, 1)$, então $p = (0, 0, 0)$; quando $\theta_1 = \theta_2 = \theta_i = 1/3$, então existirá uma outra solução, qual seja, $p = (1/2, 1/2, 1/2)$.

Havendo obtido esses resultados, podemos estudar a estabilidade em torno dos pontos $(s_1, s_2, s_3)$ onde $s_i = 0$ ou $s_i = 1$. Numa vizinhança de um ponto em que $s_i = 0$, temos que $s_i \to 0$ se a população de tipo $i$ prefere a estratégia $\alpha$ em relação à estratégia $\beta$. Ora, isto ocorre se e somente se, nessa vizinhança, $U_{i\alpha} > U_{i\beta}$. De modo semelhante, numa vizinhança de um ponto em $s_i = 1$, temos que $s_i \to 1$ se a população de tipo $i$ prefere a estratégia $\beta$ em relação à estratégia $\alpha$. Ora, isto ocorre se e somente se, nessa vizinhança, $U_{i\alpha} < U_{i\beta}$.

Para estudar, pois, a referida estabilidade é preciso examinar a relação entre $U_{i\alpha}$ e $U_{i\beta}$. Como $U_{i\beta[i+1]} = U_{i\alpha}$, temos que:

$$U_{i\alpha} - U_{i\beta} = [1 - \frac{p_i}{s_i}][U_{i\alpha} - U_{i\beta(i+2)}]$$

Agora, se $s_i \to 0$, então também é verdade que $p_i \to 0$. Em conseqüência, a razão $p_i/s_i$ é aparentemente indeterminada. Entretanto, como $p_i$ e $s_i$ são probabilidades interdependentes entre si, ou seja, como $s_i \geq p_i$, temos que $p_i/s_i \to 0$. Por outro lado, se $s_i \to 1$, temos que $p_i \to p_i^*$, sendo $p_i^*$ determinado pelas equações da dinâmica de estoques.

Em conseqüência, como o termo $[1 - p_i/s_i]$ é sempre positivo, se $s_i \to 0$, então a seguinte condição tem de ser válida:

$$\lim_{s_i \to 0} U_{i\alpha} > \lim_{s_i \to 0} U_{i\beta(i+2)}$$

Por outro lado, de forma similar, se $s_i \to 1$, então esta outra condição tem de ser válida:

$$\lim_{s_i \to 0} U_{i\alpha} < \lim_{s_i \to 0} U_{i\beta(i+2)}$$

Com base nessas considerações analíticas, podemos passar imediatamente ao estudo da estabilidade local, considerando cada um dos pontos

$(s_1, s_2, s_3)$ onde $s_i = 0$ ou $s_i = 1$. Observemos que obteremos três tipos de condições: (a) condições de validade condicionais, as quais dizem que o ponto é estável dependendo de restrições sobre os valores dos $\theta_i$; (b) condições que permanecem sempre válidas, independentemente dos valores dos $\theta_i$; e (c) restrições que não podem ser obedecidas de nenhum modo. Iniciemos pelos casos em que o ponto considerado pode ser assintoticamente estável:

Caso em que $(s_1, s_2, s_3) \rightarrow (0, 1, 0)$. Para $i = 1$, temos a seguinte condição restritiva de validade:

$$\lim_{s \to (0,1,0)} [\theta_2(s_2 - p_2)\, l_1 + \theta_3\, p_3 l_1 - c_2] > \lim_{s \to (0,1,0)} [\theta_3\,(1 - s_3 + p_3)\, l_1 - c_3]$$

$$c_3 - c_2 > \frac{\theta_3\,\theta_1 + \theta_2 - \theta_2\,\theta_3}{\theta_1 + \theta_3} l_1 = \frac{\theta_3\,(1 - 2\,\theta_2)}{1 - \theta_2} l_1$$

Para $i = 2$, temos a seguinte restrição sempre válida:

$$\lim_{s \to (0,1,0)} [\theta_3(s_3 - p_3)\, l_2 + \theta_1\, p_1 l_2 - c_3] < \lim_{s \to (0,1,0)} [\theta_1\,(1 - s_1 + p_1)\, l_2 - c_1]$$

$$\Rightarrow c_1 - c_3 < \theta_1 l_2$$

Para $i = 3$, temos a seguinte restrição também sempre válida:

$$\lim_{s \to (0,1,0)} [\theta_1(s_1 - p_1)\, l_3 + \theta_2\, p_2 l_3 - c_1] > \lim_{s \to (0,1,0)} [\theta_2\,(1 - s_2 + p_2)\, l_3 - c_2]$$

$$\Rightarrow c_2 - c_1 > 0$$

Caso $(s_1, s_2, s_3) \rightarrow (1, 1, 0)$. Se $i = 1$, temos a seguinte condição restritiva de validade:

$$c_3 - c_2 < \frac{1}{2}(2\theta_3 - \theta_2 - 1 + \phi_1) l_1$$

Se $i = 2$, temos a seguinte restrição sempre válida: $c_1 - c_3 < 0$. Se $i = 3$, temos a seguinte restrição sempre válida: $c_2 - c_1 > \theta_1\,(p_1 - 1) l_3$.

Caso $(s_1, s_2, s_3) \rightarrow (0, 0, 1)$. Se $i = 1$, temos a seguinte restrição sempre válida: $c_3 - c_2 > 0$. Se $i = 2$, temos a seguinte condição de validade:

$$c_1 - c_3 > \frac{\theta_1\,(1 - 2\,\theta_3)}{1 - \theta_3} l_2$$

Se $i = 3$, temos a seguinte condição de validade: $c_2 - c_1 < \theta_2 \, l_3$.

Os três pontos até agora examinados, portanto, podem ser assintoticamente estáveis. Consideremos, então, os pontos extremos que são sempre instáveis. Eis que isto revela por que aparecerão, agora, condições que nunca podem ser válidas.

Caso $(s_1, s_2, s_3) \to (1, 1, 1)$. Para $i = 1$ temos a seguinte restrição inválida: $c_3 - c_2 < -\theta_2 \, (1 - p_2) \, l_1$.

Caso $(s_1, s_2, s_3) \to (1, 0, 1)$. Para $i = 1$ temos a seguinte restrição inválida: $c_3 - c_2 < 0$.

Caso $(s_1, s_2, s_3) \to (1, 0, 0)$. Para $i = 2$ temos a seguinte restrição inválida: $c_1 - c_3 > 0$.

Caso $(s_1, s_2, s_3) \to (0, 1, 1)$. Para $i = 3$ temos a seguinte restrição inválida: $c_2 - c_1 < 0$.

Caso $(s_1, s_2, s_3) \to (0, 0, 0)$. Para $i = 2$ temos a seguinte restrição inválida: $c_1 - c_3 < -\theta_1 l_2$.

Havendo derivado todos esses resultados, torna-se possível analisar graficamente o espaço de validade das soluções monomórficas. Isto está feito no corpo principal do artigo.

## NOTAS

1. O trabalho na economia política clássica não é encarado como mero fator de produção. Implícita ou explicitamente é tratado como atividade teleológica, como fonte da sociabilidade humana e como modo pelo qual os homens se apropriam da natureza. Seguimos Marx na leitura dos resultados da economia política clássica.
2. De uma perspectiva mais geral, evidentemente, esse processo pode ser considerado como algo que está em permanente transformação.
3. De um ponto de vista do processo físico-químico, certos recursos naturais fornecem algo de essencial à produção: energia em formas nobres. Não há dúvida que os processos produtivos transformam energia nobre em energia degradada, fazendo aumentar a entropia. Os processos produtivos ocorrem numa temporalidade irreversível e são, de fato, irrevogáveis (Georgescu-Roegen, 1971).
4. Posteriormente, faremos considerações breves sobre o aumento de produtividade e como este aumento altera os resultados obtidos.

5. Na construção da tabela 2, estamos supondo que o tamanho relativo das três populações é uma variável que está aí indicada como fração $\theta_i$ da população total.
6. Supomos que os agentes comunicam-se entre si e que a troca de informação é imprescindível à vida econômica. Nessa perspectiva, o fornecimento da informação vem a ser a produção de um bem público. Há aqui, evidentemente, um problema de dilema de prisioneiro implícito. Admitimos de modo *ad hoc* que esse problema é superado no contexto do modelo.
7. Há, obviamente, outras formas de fechamento: Wright, por exemplo, emprega como *payoffs* os próprios $U_i$. O resultado que obtém, entretanto, é muito semelhante àquele encontrado neste artigo.
8. Este método, aliás, é uma adaptação de método similar empregado por Wright (1995) no contexto de otimização dinâmica.
9. As possibilidades que não recaem nesse caso recaem num outro que não será, entretanto, examinado neste artigo: $c_1 < c_3 < c_2$.
10. Poderíamos ter adotado quaisquer outros valores para $c_1$, $c_2$, $c_3$ desde que fossem obedecidas as restrições estabelecidas no apêndice matemático.
11. É fácil mostrar que os pontos extremos não podem ser assintoticamente estáveis; basta analisar a estabilidade local calculando os limites da relação de *payoffs* fazendo o vetor $\theta$ tender para o ponto considerado.
12. O modelo de equilíbrio geral vem a ser um modelo de transações centralizadas que se concentra na determinação simultânea de todos os valores de troca (preços) sob a condição de que eles sejam compatíveis com a condição de equilíbrio (nulidade de todos os excessos de demanda). É por isso que um autor como Hahn diz o seguinte: "O desafio mais sério que a existência da moeda coloca para o teórico é o seguinte: no modelo econômico melhor desenvolvido não há lugar para ela. E o modelo melhor desenvolvido é, obviamente, a versão de Arrow-Debreu do equilíbrio geral walrasiano" (Hahn, 1983, p. 1).
13. Em outros dois artigos, consideramos a possibilidade de existência da moeda ouro como equivalente geral (Prado, 2000a, 2000b).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


AIYAGARI, S. R., WALLACE, N. (1999) "Existence of steady states with positive consumption in the Kiyotaki-Wright model". *Review of Economic Studies*, 1991, n. 58, p. 901-916.

——— (1992) "Fiat money as a medium of exchange". *Economic Theory*, v. 2, p. 447-464.

DUMÉNIL, D. E D. LÉVY (1987) "The dynamics of competition: a restoration of the classical analysis". *Cambridge Journal of Economics*, v. 11, p. 133-164.

GEORGESCU-ROEGEN, N. (1971) *The Entropy Law and the Economic Process.* Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

GINTIS, H. (1996) "A Markov model of production, trade, and money: theory and artificial life simulation". Amherst.: University of Massachusetts (mimeo).

HAHN, F. (1983) *Money and Inflation*. Cambridge: The MIT Press.

KEHOE, T. J., KIYOTAKI, N., WRIGHT, R. (1993) "More on money as a medium of exchange". *Economic Theory*, v. 3, p. 297-314.

KIYOTAKI, N., WRIGHT, R. (1989) "On money as a medium of exchange". *Journal of Political Economy*, n. 97, p. 927-954.

——— (1991) "A contribution to the pure theory of money". *Journal of Economic Theory*, v. 53, p. 215-235.

——— (1993) "A search-theoretic approach to monetary economics". *American Economic Review*, v. 83, p. 63-77.

OSTROY, J. M., STARR, R. M. (1990) "The transactions role of money". In: B. M. Friedman, F. H. Hahn (org.), *Handbook of Monetary Economics*, v. I, p. 3-62.

POTTS, J. (2000) *The New Evolutionary Microeconomics: complexity, competence and adaptive behaviour*. Cheltenham: Edward Elgar.

PRADO, E. F. S. (2000a)"On the origin of gold as money: an analysis based on evolutionary models". Texto para discussão n. 5, IPE/USP.

——— (2000b) "Dois modelos clássicos de economia monetária" (mimeo).

SETHI, R. (1999) "Evolutionary stability and media of exchange". *Journal of Economic Behavior & Organization*, v. 40, p. 233-254.

VEGA-REDONDO, F. (1996) *Evolution, Games, and Economic Behavior*. Oxford University Press.

WRIGHT, J. W. (1995)" Search, evolution and money". *Journal of Economic Dynamics and Control*, v. 19, p. 181-206.