

## Formulação multi-escala para a análise de flexão de placas considerando processos dissipativos na microestrutura e acoplamento MEC/MEF

Multi-scale formulation for analysis of the plate bending problem considering dissipative processes in the microstructure and coupling BEM and FEM

Nilson Sérgio de Souza Júnior<sup>1</sup>, Gabriela Rezende Fernandes<sup>2</sup>,  
José Julio de Cerqueira Pituba<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Departamento de Engenharia Civil – Laboratório de Modelagem Computacional – Universidade Federal de Goiás / Regional Catalão CEP: 75704-020, Catalão, GO.  
e-mail: nilson\_civil@hotmail.com; gabriela.fernandes@pq.cnpq.br; julio.pituba@pq.cnpq.br

### RESUMO

Neste trabalho apresentam-se análises de flexão de placas compostas por materiais heterogêneos através de uma abordagem multi-escala. O macro-contínuo, representado neste trabalho pela placa, é modelado por uma formulação não-linear do Método dos Elementos de Contorno (MEC), que leva em conta o operador tangente consistente (CTO). A micro-escala é representada pelo EVR (Elemento de Volume Representativo), sendo seu problema de equilíbrio definido em termos de flutuação dos deslocamentos e solucionado através do Método dos Elementos Finitos (MEF), onde a hipótese de média volumétrica das tensões e deformações é adotada para se fazer a passagem do micro-contínuo para o macro-contínuo. A cada ponto do macro-contínuo, onde se necessita conhecer as tensões e o tensor constitutivo deve estar associado um EVR, onde se podem definir inclusões e/ou vazios no interior de uma matriz a fim de representar a micro-estrutura de um material heterogêneo. Nos exemplos numéricos são considerados diferentes EVRs com inclusões elásticas dentro de uma matriz, onde os modelos de Von Mises ou Mohr Coulomb são adotados, a fim de governar o comportamento do seu material. Consideram-se diferentes frações volumétricas para as inclusões a fim de verificar a influência na resposta homogeneizada da microestrutura e, conseqüentemente, no comportamento mecânico do macro-contínuo. Para solucionar o problema de equilíbrio do EVR devem-se adotar condições de contorno em termos de flutuações dos deslocamentos, que nos exemplos analisados no presente trabalho serão consideradas como periódicas.

**Palavras-chave:** Modelagem multi-escala, homogeneização, elementos de contorno, flexão de placas.

### ABSTRACT

Analyses of the bending problem of plates composed of heterogeneous materials are performed considering a multi-scale modelling. The macro-continuum, represented in this paper by the plate, is modelled by a non-linear formulation of the boundary element method (BEM) taking into account the consistent tangent operator (CTO) in the iterative procedure required to solve the plate equilibrium problem. The micro-scale is represented by the RVE (Representative Volume Element) being its equilibrium problem solved in terms of displacements fluctuations by a Finite Element Formulation (FEM), where the volume averaging hypothesis of strain and stress tensors is used to make the micro-to-macro transition. To each point of the macro-continuum where the stresses and constitutive tensor have to be computed, a RVE must be assigned, where inclusions and voids can be defined inside the matrix in order to represent the microstructure of a heterogeneous material. In the numerical examples are considered different RVEs with elastic inclusions, while for the matrix the Von Mises or Mohr-Coulomb criteria can be adopted to govern its material behavior. Different volume fractions have been adopted for the inclusions in order to verify its influence on the homogenized response of the microstructure as well as on the mechanical behavior of the macrostructure. To solve the RVE equilibrium

problem, boundary conditions in terms of displacement fluctuations have to be imposed, which for the numerical examples presented in this paper will be adopted periodic.

**Keywords:** Multi-scale modelling, homogenization, boundary elements, plate bending.

## 1. INTRODUÇÃO

A maioria dos materiais é heterogênea ao nível dos grãos ou da sua microestrutura. Além disso, a microestrutura de alguns materiais são manipulados adicionando novos constituintes, a fim de melhorar suas propriedades. Como qualquer heterogeneidade do material, assim como o processo de fissuração que ocorre na micro-escala afetam diretamente a resposta da estrutura [1-4], sua modelagem em diferentes escalas é muito importante para melhor representar o comportamento de materiais complexos [5-9]. Em muitos casos, a análise não-linear convencional não consegue representar de forma precisa o comportamento de tais estruturas.

Para se fazer a modelagem multi-escala deve-se definir no domínio do macro-contínuo pontos de interesse que são chamados de EVR (Elemento de Volume Representativo), os quais representam a microestrutura, ao nível dos grãos, do macro-contínuo na vizinhança infinitesimal do ponto [10-15]. Podem-se definir vazios ou inclusões (elásticas ou elasto-plásticas) dentro da matriz do EVR, sendo a formação e propagação de micro-fissuras ou o processo de plastificação monitorados individualmente em cada EVR, considerando-se as diferentes propriedades elásticas e modelo constitutivo adotado para cada fase do EVR. Assim, considerando-se uma estrutura sujeita a um carregamento qualquer, através do modelo na macro-escala, obtém-se para cada EVR o campo de deformações, que deverá ser imposto de forma constante a todos os pontos do EVR, como “carregamento”. Então, utilizando-se o modelo adotado na micro-escala, estuda-se o comportamento do material nas diferentes fases do EVR devido a essa deformação imposta. Em seguida, através de princípios de homogeneidade e conceito de média volumétrica, passa-se da micro-escala para a macro-escala e atualizam-se as tensões e a relação constitutiva para aquele ponto do macro. Com a relação constitutiva atualizada para todos os pontos da macro-escala (neste trabalho tratamos de placas), dá-se novo incremento de carga obtendo-se, através do modelo na macro-escala, novos campos de deformações a serem aplicados nos EVRs. Portanto, a análise na micro-escala alimenta aquela na macro-escala e vice-versa. Neste trabalho, a microestrutura é modelada pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), através da formulação apresentada em [12].

A formulação do MEC a ser usada na análise da macro-escala é descrita em [16], onde se deve discretizar o contorno da placa em elementos nos quais os deslocamentos e esforços são aproximados para se obter a solução do problema. Além disso, na análise não-linear necessita-se também discretizar o domínio da placa em células, onde são aproximados os momentos iniciais ou inelásticos. Os momentos num ponto da placa são calculados integrando-se numericamente as tensões ao longo da espessura, usando um sistema gaussiano. Assim, para se obter a solução em multi-escala, deve-se definir um EVR em cada ponto de Gauss definido ao longo da espessura e relativo a um determinado nó do macro-contínuo. Em suma, este trabalho é um desenvolvimento dos trabalhos anteriores dos autores procurando-se validar a formulação proposta com novas aplicações e emprego do modelo constitutivo de Mohr-Coulomb com vistas às aplicações futuras em compósitos como o concreto. Diante disso, são apresentados dois exemplos numéricos. No primeiro, simulações de estruturas homogêneas empregando-se modelos constitutivos fenomenológicos são comparadas com a modelagem proposta quando da inserção de heterogeneidade na microestrutura e sua repercussão não macro-contínuo. Já no segundo exemplo, adota-se uma inclusão no centro do EVR com diferentes frações de volume, a fim de verificar tanto a influência na resposta homogeneizada da microestrutura, quanto no comportamento mecânico da placa.

## 2. MATERIAIS E MÉTODOS

### 2.1 Formulação do MEC para modelar o macro-contínuo (problema não-linear de flexão de placas)

#### 2.1.1 Relações Básicas

Neste trabalho, o problema do macro-contínuo é definido pelo problema não-linear de flexão de placas, que será modelado pelo Método dos Elementos de Contorno (MEC), através da formulação descrita em [16], baseada nas hipóteses de Kirchhoff. Para definir o problema considere-se uma placa de espessura  $t$ , contorno externo  $\Gamma$  e domínio  $\Omega$ , onde as variáveis são definidas segundo um sistema de coordenadas cartesianas onde  $x_1$  e  $x_2$  são as direções no plano da placa e  $x_3$  a direção transversal a esse plano. Assume-se que a placa suporta apenas cargas distribuídas  $g$  distribuídas na sua superfície média. Como o presente trabalho trata de

análise não-linear, todas as variáveis do problema serão definidas em termos de taxas, ou seja, suas derivadas no tempo, sendo  $(\dot{x}) = dx/dt$ . Assim, as variáveis relacionadas ao problema de flexão de placas são:  $\dot{V}_n$  (taxa do esforço cortante equivalente);  $\dot{M}_n$  (taxa do momento de flexão);  $\dot{w}$  (taxa da deflexão);  $\dot{w}_{,n}$  (taxa da derivada direcional), onde  $(n, s)$  é o sistema de coordenadas locais, sendo  $n$  e  $s$ , respectivamente, as direções normal e tangencial ao contorno da placa. As equações básicas do problema de flexão de placas serão omitidas aqui, mas as mesmas podem ser encontradas em [19]-[24].

As taxas dos momentos de flexão e de torção  $\dot{m}_{ij}$  são obtidas integrando-se as taxas de tensões  $\dot{\sigma}_{ij}$  ao longo da espessura  $t_h$  da placa, como segue:

$$\dot{m}_{ij} = \int_{-t_h/2}^{t_h/2} z \dot{\sigma}_{ij} dz \tag{1}$$

No contexto não-linear, as tensões ( $\dot{\sigma}_{ij}$ ) são obtidas a partir do modelo constitutivo adotado. Porém, neste trabalho como é feita uma abordagem em multi-escala, essas tensões são calculadas após a solução do EVR, adotando-se uma técnica de homogeneização para se fazer a passagem da micro-escala para a macro-escala. Por outro lado, as deformações podem ser divididas em suas parcelas elásticas  $\dot{\epsilon}_{ij}^e$  e plásticas  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  como segue:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \tag{2}$$

Observe que, aplicando-se a lei de Hooke, as tensões  $\dot{\sigma}_{ij}$  são relacionadas às deformações elásticas, sendo  $\dot{\epsilon}_{ij}^e = \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^p$ . Além disso, adotando-se as hipóteses de Kirchhoff, as deformações totais podem ainda serem escritas em termos das curvaturas  $\dot{w}_{,ij}$ :  $\dot{\epsilon}_{ij} = -x_3 \dot{w}_{,ij}$ . Assim, as taxas de momentos elásticos de tentativa  $\dot{m}_{ij}^e$ , podem ser escritos em termos das curvaturas totais  $\dot{w}_{,ij}$ :

$$\dot{m}_{ij}^e = -D [\nu \dot{w}_{,kk} \delta_{ij} + (1 - \nu) \dot{w}_{,ij}] \tag{3}$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker,  $D = Et_h^3 / (12(1 - \nu^2))$  é a rigidez à flexão da placa e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

Portanto, a taxa de momentos plásticos ou inelásticos, se outro tipo de modelo constitutivo for adotado, podem ser definidos como:

$$\dot{m}_{ij}^p = \dot{m}_{ij}^e - \dot{m}_{ij} \tag{4}$$

### 2.1.2 Equações Integrais

A equação integral do deslocamento para um ponto interno é obtida a partir do Teorema de Reciprocidade de Betti, que no caso de flexão de placas é dado por:

$$\int_{\Omega} w_{,jk}^* \dot{m}_{jk} d\Omega = \int_{\Omega} m_{jk}^* \dot{w}_{,jk} d\Omega - \int_{\Omega} w_{,jk}^* \dot{m}_{jk}^{(p)} d\Omega \tag{5}$$

onde os termos com índice \* são relacionados ao problema fundamental.

Integrando-se a equação (5) por partes duas vezes, se obtém a conhecida representação de deflexão para um ponto de colocação  $q$ :

$$K(q)w(q) = - \int_{\Gamma} \left( \dot{V}_n^* \dot{w} - M_n^* \frac{\partial \dot{w}}{\partial n} \right) d\Gamma - \sum_{j=1}^{N_c} R_{cj}^* w_{cj} + \sum_{j=1}^{N_c} \dot{R}_{cj} w_{cj}^* + \int_{\Gamma} \left( \dot{V}_n w^* - M_n \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma + \int_{\Omega_g} \dot{g} w^* d\Omega - \int_{\Omega} w_{,jk}^* \dot{m}_{jk}^p d\Omega \tag{6}$$

onde  $w^*$ ,  $V^*$  e  $M^*$  são valores fundamentais de deflexão, cortante equivalente e momentos de contorno;  $N_c$  é o número de cantos e  $\Omega_g$  a região carregada da placa. Para os valores dos termos livres  $K(q)$ , ver em [18].

Note que a solução não-linear é obtida a partir de um processo incremental de carga. Assim considerando-se  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  um passo de tempo, relacionado a um incremento de carga, o problema consiste em achar a solução no passo de tempo  $t_{n+1}$ , sendo a solução já conhecida em  $t_n$ . Desse modo, nas equações anteriores os valores escritos em termos de taxas devem ser substituídos por seus respectivos valores em incrementos. A representação integral das curvaturas  $\Delta w_{,i}$  é obtida derivando-se a equação (6) duas vezes, ou seja:

$$\Delta w_{,li} = - \int_{\Gamma} (V_{n,li}^* \Delta w - M_{n,li}^* \frac{\partial \Delta w}{\partial n}) d\Gamma - \sum_{j=1}^{N_c} R_{cj,li}^* \Delta w_{cj} + \sum_{j=1}^{N_c} \Delta R_{cj} w_{cj,li}^* + \int_{\Gamma} (\Delta V_n w_{,li}^* - \Delta M_n w_{,n,li}^*) d\Gamma + \int_{\Omega_g} \Delta g w_{,li}^* d\Omega_g - \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\Omega} w_{,jk\ell}^* \Delta m_{jk}^p d\Omega \quad (7)$$

### 2.1.3 Equações Algébricas

Para transformar as equações integrais em algébricas, o contorno é discretizado em elementos com aproximação quadrática das variáveis, enquanto o domínio é discretizado em células com aproximação linear dos momentos inelásticos (ou plásticos). Ao longo do contorno têm-se quatro valores definidos:  $\Delta w$ ,  $\Delta w_n$ ,  $\Delta M_n$  e  $\Delta V_n$ , sendo dois desses valores dados como condição de contorno. Portanto, duas equações devem ser escritas para cada nó de contorno. Neste trabalho, será considerada uma equação de  $\Delta w$  escrita no próprio nó e outra equação de  $\Delta w$  escrita para um ponto externo bem próximo ao contorno. Esse esquema já foi adotado em diversos trabalhos, como por exemplo, [20] – [23], gerando bons resultados. Além disso, nos cantos são definidas duas variáveis, sendo uma delas dada como condição de contorno. Portanto, uma equação de  $\Delta w$  também deve ser escrita em cada canto da placa. Note que o cálculo das integrais de domínio envolvendo o carregamento, assim como as integrais nas células são calculadas transformando-as em integrais de contorno. Além disso, a fim de melhorar a precisão numérica adota-se a técnica de sub-elementos na integração numérica das células e dos elementos de contorno (ver mais detalhes em [22]).

Para se obter a solução não-linear, devem-se ainda escrever 3 equações dos momentos elásticos de tentativa  $\Delta M_{jk}^e$  nos nós das células. Essas equações são obtidas considerando-se a equação (3), onde as curvaturas são definidas pela equação (7). Após escrever todas as equações necessárias, obtém-se um sistema de equações, que após inserir as condições de contorno, pode ser escrito como (ver mais detalhes em [16]):

$$\Delta X = \Delta L + R_M \Delta m^P \quad (8)$$

onde o vetor  $\Delta X$  contém as incógnitas do contorno,  $\Delta L$  representa a parte elástica dessas incógnitas,  $R_M$  representa as correções devido ao incremento de momentos inelásticos.

Escrevendo-se as equações algébricas de  $\Delta M_{jk}^e$  para todos os nós de células, obtém-se (ver mais detalhes em [16]):

$$\Delta M^e = \Delta K + S_M \Delta m^P \quad (9)$$

onde  $\Delta K$  é a solução elástica dada em termos de incremento de momentos,  $S_M$  expressa o efeito do incremento de momentos inelásticos  $\Delta m^P$ .

Observe que  $\Delta m^P$ ,  $\Delta M^e$  e  $\Delta m$  definidos, respectivamente, nas equações (4), (3) e (1) são calculados localmente para um determinado ponto, isto é, são obtidos levando-se em conta apenas seu incremento de curvatura  $\Delta w_{,ij}$  e de tensões  $\Delta \sigma_{ij}$  (obtidas após a solução do EVR). Por outro lado, os incrementos de momentos elásticos  $\Delta M^e$  definidos na equação (9) são calculados levando-se em conta os incrementos de momentos inelásticos  $\Delta m^P$  de todos os nós da placa. Neste contexto, pode-se também definir a equação algébrica do incremento de momentos  $\Delta M$  (ver mais detalhes em [16]):

$$\Delta M = C_M \Delta \chi - \Delta K - S_M (\Delta m^P) + \Delta m \quad (10)$$

onde os valores nodais  $\Delta m^P$  são dados por:

$$\Delta m^P = C_M \Delta \chi - \Delta m \quad (11)$$

sendo  $\Delta \chi$  o incremento de curvaturas nodais da placa e  $C_M$  a matriz elástica obtida a partir da equação (3).

### 2.1.4 Equações de Equilíbrio e Operador Tangente Consistente

Para um incremento  $n$ , a equação de equilíbrio da placa é dada por:

$$\Delta K_n - \Delta M_n = 0 \quad (12)$$

onde os vetores  $\Delta K_n$  e  $\Delta M_n$  são definidos, respectivamente, nas equações (9) e (10).

Substituindo-se a equação (10) na equação (12), obtém-se à expressão final para a equação de equilíbrio ou equação de resíduos da placa:

$$R_M (\Delta \chi_n) = 2 \Delta K_n - C_M \Delta \chi_n + S_M (C_M \Delta \chi_n - \Delta m_n) - \Delta m_n = 0 \quad (13)$$

Após aplicar à placa o incremento de curvaturas  $\Delta\chi_n$  e obter a distribuição de tensões  $\Delta\sigma_{ij}$  ao longo da espessura da placa, para todos os nós de células, se a equação (13) não for satisfeita, haverá um resíduo  $R_M$ , isto é o incremento não será elástico. Neste caso, a equação (13) será resolvida aplicando-se o método de Newton-Raphson, no qual se necessita de um processo iterativo para obter-se o valor do incremento  $\Delta\chi_n$  que satisfaz a equação de equilíbrio da placa. Seja uma iteração  $i$  onde o incremento de curvatura  $\Delta\chi_n^i$  é conhecido. O próximo incremento de tentativa  $\Delta\chi_n^{i+1}$  na iteração  $(i+1)$  é obtido adicionado as correções  $\delta\Delta\chi_n^{i+1}$ , ou seja:

$$\Delta\chi_n^{i+1} = \Delta\chi_n^i + \delta\Delta\chi_n^{i+1} \quad (14)$$

onde as correções  $\delta\Delta\chi_n^{i+1}$  são calculadas linearizando-se a equação (13), sendo dadas por:

$$\delta\Delta\chi_n^{i+1} = \left[ -\frac{\partial R_M(\Delta\chi_n^i)}{\partial \Delta\chi_n^i} \right]^{-1} R_M(\Delta\chi_n^i) \quad (15)$$

onde  $-\frac{\partial R_M(\Delta\chi_n^i)}{\partial \Delta\chi_n^i}$  é o operador tangente consistente obtido derivando-se a equação (13), resultando em:

$$-\frac{\partial R_M(\Delta\chi_n^i)}{\partial \Delta\chi_n^i} = S_M \left( C_{M_n}^{ep(i)} - C_M \right) + C_M + C_{M_n}^{ep(i)} \quad (16)$$

Na equação (16),  $C_{M_n}^{ep(i)}$  é a matriz que contém as relações constitutivas  $[C_m^{ep}]_k^i$  (que relaciona momentos e curvaturas) referentes a todos nós de células. Para um nó  $k$ ,  $[C_m^{ep}]_k^i$  é calculada integrando-se o tensor constitutivo  $[C^{ep}]_k^i$  (que relaciona tensões e deformações) ao longo da espessura da placa  $t_h$  como segue:

$$[C_m^{ep}]_k^i = \frac{\partial m_k^i}{\partial \Delta\chi_k^i} = \int_{-t_h/2}^{t_h/2} (x_3)^2 [C^{ep}]_k^i dx_3 \quad (17)$$

sendo  $[C^{ep}]_k^i = \frac{\partial(\sigma_k^i)}{\partial \varepsilon_k^i}$ , que na análise em multi-escala é calculado após resolver o problema de equilíbrio do EVR; na análise não-linear convencional ele é calculado de acordo com o modelo constitutivo adotado.

Observe que os valores de momentos  $\Delta m_{ij}$  definidos na equação (1), assim como o tensor  $[C_m^{ep}]_k^i$  definido na equação (17), são calculados numericamente usando a fórmula e a quadratura de Gauss. Para isso, devem ser definidos pontos de Gauss ao longo da espessura da placa (veja [21], [22], [23]). Assim, após o cálculo das curvaturas nodais na placa (equação (14)), o incremento de deformações  $\Delta\varepsilon_{ij}^g$  referente a um ponto de Gauss de um determinado nó de célula pode ser obtido. Então, esse incremento de deformações é imposto ao respectivo EVR e o incremento de tensão  $\Delta\sigma_{ij}^g$  obtido após resolver o problema de equilíbrio do EVR discutido adiante. Finalmente, a partir da distribuição de tensões ao longo da espessura, os momentos  $\Delta m_{ij}$  são obtidos considerando-se a equação (1), que numericamente resultam em:

$$\Delta m_{ij} = \frac{t^2}{4} \sum_{g=1}^{N_g} \Delta\sigma_{ij}^{(g)} \xi_g \omega_g \quad i,j=1,2 \quad (18)$$

onde  $N_g$  é o número de pontos de Gauss ao longo da espessura,  $\xi_g$  e  $\omega_g$  são, respectivamente, a coordenada adimensional e fator ponderador do ponto de Gauss.

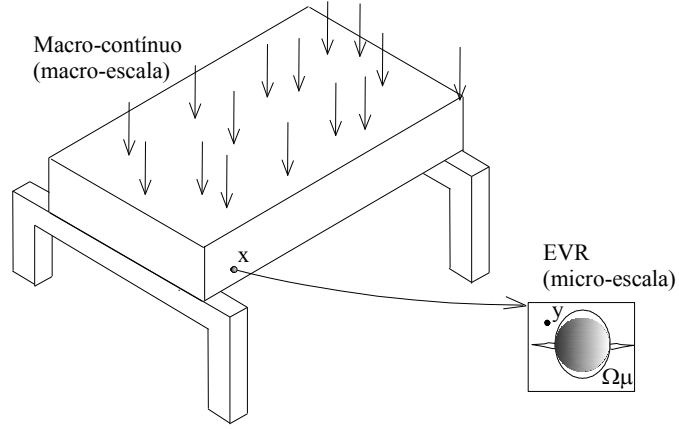
O critério de convergência adotado para o problema de equilíbrio da placa é dado por  $\sqrt{R_M^T R_M} / \sqrt{\Delta K_M^T \Delta K_M} \leq tol$ , onde  $tol$  é a tolerância adotada no processo iterativo.

### 2.1.5 Definição do EVR e Passagem do Micro para o Macro-Contínuo

Seja o macro-contínuo representado na figura (1), que neste trabalho é definido pela placa, onde  $x$  é um ponto qualquer do macro-contínuo. Na análise em multi-escala, cada ponto  $x$  é representado pelo EVR (Elemento de Volume Representativo) (veja [10] - [12]), onde define-se  $V_\mu$  como seu volume,  $\Omega_\mu$  como seu domínio e  $\partial\Omega_\mu$  como seu contorno, sendo  $y$  um ponto qualquer do mesmo. Neste trabalho, deve-se definir um EVR para cada ponto de Gauss definido ao longo da espessura e referente a um determinado nó de célula. Observe que dimensão, discretização e definição dos nós no EVR são completamente independentes das dimensões ou da discretização do problema estudado na macro-escala. É importante dizer que, na entrada de dados definem-se os nós e a discretização para apenas um EVR padrão, pois esses dados do EVR se mantêm constantes, ou seja, são independentes da posição que ele ocupe na placa.

Note na figura (1) que o EVR pode ser composto por vazios (domínio  $\Omega_\mu^v$ ) e por partes sólidas (domínio  $\Omega_\mu^s$ ), sendo  $\Omega_\mu = \Omega_\mu^v \cup \Omega_\mu^s$ . Além disso, a parte sólida pode ser composta de várias fases, as quais podem

ter módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson diferentes uma da outra, além de poderem ser governadas por diferentes modelos constitutivos. Para simplificar, no que segue será considerado apenas o caso que os buracos não interceptam o contorno do EVR.



**Figura 1:** Definição do Macro-contínuo e microestrutura

Neste trabalho, o EVR também é considerado como meio contínuo e, portanto o conceito de tensão permanece válido a nível microscópico. Assim, a tensão microscópica pode ser escrita em termos de deformação como:  $\sigma_\mu(y, t) = f_y(\varepsilon_\mu(y, t))$ , onde  $f_y$  é o tensor constitutivo definido de acordo com o critério adotado ou é dado pela lei de Hooke se um comportamento elástico for adotado para a fase.

Assume-se que o tensor de deformação  $\varepsilon(x, t)$  assim como o tensor das tensões  $\sigma(x, t)$  referentes a um ponto  $x$  do macro-contínuo seja a média volumétrica de seus respectivos campos microscópicos ( $\varepsilon_\mu = \varepsilon_\mu(y, t)$  ou  $\sigma_\mu = \sigma_\mu(y, t)$ ) do EVR associado a  $x$ , ou seja, para um instante qualquer  $t$ , tem-se:

$$\varepsilon(x, t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \varepsilon_\mu(y, t) dV \quad (19)$$

$$\sigma(x, t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu(y, t) dV \quad (20)$$

onde os tensores  $\varepsilon = \varepsilon(x, t)$  e  $\sigma = \sigma(x, t)$  são designados, respectivamente, deformação e tensão homogeneizados.

Além disso, a deformação microscópica  $\varepsilon_\mu$  pode ser escrita em termos do campo de deslocamento microscópico  $u_\mu$  como segue:

$$\varepsilon_\mu(y, t) = \nabla^S u_\mu(y, t) \quad (21)$$

onde  $\nabla^S$  é o operador gradiente simétrico.

Pelo processo de homogeneização, pode-se também definir o tensor constitutivo homogeneizado  $C^{ep}$  definido na equação (17) como:

$$C^{ep}(x, t) = \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial \varepsilon(x, t)} = \frac{\frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \partial \sigma_\mu(y, t) dV}{\partial \varepsilon(x, t)} = \frac{\frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \partial f_y(\varepsilon_\mu(y, t)) dV}{\partial \varepsilon(x, t)} \quad (22)$$

Portanto, após alcançar convergência do processo iterativo definido no EVR, as tensões e o tensor constitutivo referente ao macro-contínuo podem ser obtidos a partir das equações (20) e (22). Note que a tensão macroscópica  $\sigma$  (equação (20)) e o tensor constitutivo do macro-contínuo  $C^{ep}$  (equação (22)) são obtidos a partir de seus respectivos campos no EVR. Portanto, a definição de vazios ou de inclusões com diferentes materiais no interior do EVR afeta diretamente os valores dessas quantidades macroscópicas, mudando a resposta numérica da estrutura.

### 2.1.6 Campo de Deslocamento no EVR

No presente trabalho, o campo de deslocamentos  $u_\mu$  do EVR é dividido da seguinte maneira:

$$u_\mu(y, t) = \varepsilon(x, t)y + \tilde{u}_\mu(y, t) \quad (23)$$

onde a parcela  $\varepsilon(x, t)y$  varia linearmente, sendo obtida multiplicando-se a deformação constante  $\varepsilon$  imposta pelo macro pelas coordenadas do ponto  $y$  do EVR; a parcela  $\tilde{u}_\mu$  é denotada flutuação de deslocamentos e representa a variação de deformação no EVR, isto é, se a deformação no EVR é constante, tem-se  $\tilde{u}_\mu$  nulo. Analogamente, a deformação microscópica pode ser escrita como:

$$\varepsilon_\mu(y, t) = \varepsilon(x, t) + \tilde{\varepsilon}_\mu(y, t) \quad (24)$$

onde  $\varepsilon$  é a deformação homogênea imposta pelo macro-contínuo e  $\tilde{\varepsilon}_\mu$  é o campo das flutuações de deformações, sendo definida como:  $\tilde{\varepsilon}_\mu(y, t) = \nabla^S \tilde{u}_\mu$ .

A condição para se ter um campo de flutuações de deslocamentos cinematicamente admissível é que  $\tilde{u}_\mu \in \tilde{K}_\mu^*$ , sendo  $\tilde{K}_\mu^*$  o espaço vetorial dos campos de flutuações de deslocamentos minimamente restringidos e cinematicamente admissíveis, definido como (ver mais detalhes em [12]):

$$\tilde{K}_\mu^* \equiv \left\{ v / \int_{\partial\Omega_\mu} v \otimes_S n dA = 0 \right\} \quad (25)$$

onde faz-se uso da seguinte expressão  $u \otimes_S v = \frac{1}{2}(u \otimes v + v \otimes u)$ , no cálculo das integrais, válida para quaisquer vetores  $u$  e  $v$ .

Portanto, escrevendo-se a equação (24) na forma de taxas, a taxa de deformação microscópica é dita cinematicamente admissível se:

$$\dot{\varepsilon}_\mu(y, t) = \nabla^S \dot{u}_\mu = \dot{\varepsilon}(x, t) + \tilde{\varepsilon}_\mu(y, t) \quad \forall \tilde{u}_\mu \in \tilde{K}_\mu^* \quad (26)$$

onde  $\tilde{K}_\mu$  é o conjunto dos campos de flutuações de deslocamentos microscópicos cinematicamente admissíveis, sendo  $\tilde{K}_\mu \subset \tilde{K}_\mu^*$ .

## 2.2 Formulação do MEF para modelar a micro-escala

A microestrutura será modelada pelo Método dos Elementos Finitos, sendo a formulação desenvolvida detalhadamente nos trabalhos [10] - [12] e será apresentada aqui de forma resumida.

### 2.2.1 Equação de Equilíbrio do EVR

Sejam:  $\sigma_\mu = \sigma_\mu(y, t)$  a tensão em um ponto  $y$  do EVR, ou seja, a tensão microscópica;  $b = b(y, t)$  o campo de forças de volume que agem no EVR e  $t^e = t^e(y, t)$  o campo de forças externas de superfície que atuam no contorno  $\partial\Omega_\mu$  do EVR. O PTV estabelece que o EVR estará em equilíbrio se e somente se a seguinte equação variacional for satisfeita a cada instante  $t$ :

$$\int_{\Omega_\mu^S} \sigma_\mu(y, t) : \nabla^S \eta dV - \int_{\Omega_\mu^S} b(y, t) \cdot \eta dV + \int_{\Omega_\mu^p} \sigma_\mu(y, t) : \nabla^S \eta dV - \int_{\Omega_\mu^p} b(y, t) \cdot \eta dV - \int_{\partial\Omega_\mu} t^e(y, t) \cdot \eta dA = 0 \quad \forall \eta \in \mathbb{V}_\mu \quad (27)$$

onde  $\mathbb{V}_\mu$  é o espaço de deslocamentos virtuais que satisfaz  $\mathbb{V}_\mu = \tilde{K}_\mu$  e, portanto,  $\eta$  é um campo arbitrário de deslocamentos virtuais.

Assumindo-se que as forças de volume que agem no buraco ou vazio são nulas, levando-se em conta o Princípio de macro-homogeneidade de Hill-Mandel (ver mais detalhes em [12]), considerando-se ainda as equações (21) e (24) e escrevendo-se a tensão em termos das deformações,  $\sigma_\mu = f_y(\varepsilon_\mu)$ , onde  $f_y$  é o tensor constitutivo, a equação (27) pode ser reescrita da seguinte forma em termos de flutuação de deslocamentos:

$$\int_{\Omega_\mu^S} f_y(\varepsilon(x, t) + \nabla^S \tilde{u}_\mu(y, t)) : \nabla^S \eta dV = 0 \quad \forall \eta \in \mathbb{V}_\mu \quad (28)$$

Finalmente, a formulação fica completa com a escolha do espaço  $\mathbb{V}_\mu$ , isto é, com a escolha das restrições cinemáticas a ser impostas ao EVR em termos de flutuação dos deslocamentos. Na formulação desenvolvida em [12], podem ser consideradas as seguintes condições de contorno no EVR: (i) modelo de Taylor,

(ii) deslocamentos lineares, (iii) deslocamentos com variações periódicas, (iv) forças de superfície uniformes no contorno do EVR. Porém, neste trabalho, apenas será adotada a condição de contorno onde se impõem flutuações periódicas ao longo do contorno. Em [17] todas as condições de contorno são discutidas de forma detalhada.

Assim, o problema de equilíbrio de EVR consiste em encontrar o campo de flutuações de deslocamentos  $\tilde{u}_\mu \in \mathbb{V}_\mu$  tal que, a cada instante  $t$ , a equação (28) seja satisfeita. Para um campo  $\eta$  arbitrário, após a discretização do EVR em elementos, a seguinte equação de equilíbrio deve ser satisfeita para um passo de  $\rho\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$  e discretização  $h$ , sendo  $\tilde{u}_{\mu(n+1)} = \tilde{u}_{\mu(n)} + \Delta\tilde{u}_{\mu(n)}$ :

$$G_h^{n+1} = \int_{\Omega_\mu^h} B^T f_y(\varepsilon_{n+1} + B\tilde{u}_{\mu(n+1)})dV = 0 \quad (29)$$

onde  $B$  é a matriz global que relaciona deslocamentos com deformações.

Se o incremento  $n$  é não-linear, a equação (29) é resolvida aplicando-se o método de Newton-Raphson, que consiste em encontrar as correções de flutuações  $\delta\tilde{u}_\mu^{i+1}$  na iteração  $i + 1$ , tal que:

$$F^i + K^i \delta\tilde{u}_\mu^{i+1} = 0 \quad (30)$$

sendo  $K$  a matriz de rigidez tangente e  $F$  o vetor das forças internas; no caso de se ter uma discretização com  $N_e$  elementos eles são dados por:

$$F^i = \int_{\Omega_\mu^h} B^T f_y(\varepsilon_{n+1} + B\tilde{u}_\mu^i)dV = \sum_{e=1}^{N_e} B_e^T \sigma_\mu^{e(i)} V_e \quad (31)$$

$$K^i = \left[ \int_{\Omega_\mu^h} B^T D_\mu^i B dV \right] = \sum_{e=1}^{N_e} B_e^T D_\mu^{e(i)} B_e V_e \quad (32)$$

onde  $V_e$  é o volume de um elemento  $e$  qualquer e  $D_\mu^e$  é o tensor constitutivo tangente do elemento  $e$ , definido como:

$$D_\mu^i = \left( \frac{df_y}{d\varepsilon_\mu} \Big|_{\varepsilon_\mu = \varepsilon^{n+1} + B\tilde{u}_\mu^{i+1}} \right) \quad (33)$$

Após o cálculo das correções  $\delta\tilde{u}_\mu^{i+1}$  pela equação (30), o próximo campo de flutuação de deslocamentos de tentativa a ser considerado na iteração  $i + 1$  referente à microestrutura, é dado por:  $\tilde{u}_\mu^{i+1} = \tilde{u}_\mu^i + \delta\tilde{u}_\mu^{i+1}$ .

### 2.2.2 Tensão Homogeneizada

A tensão homogeneizada é calculada pela equação (20), considerando-se que o EVR é composto de vazios e parte sólida ( $\Omega_\mu = \Omega_\mu^v \cup \Omega_\mu^s$ ), resulta em:

$$\sigma = \sigma(x, t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^s} \sigma_\mu(y, t) dV + \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^v} \sigma_\mu(y, t) dV \quad (34)$$

Considerando-se o teorema de Green e discretizando-se o EVR em elementos finitos, a equação (34) pode ser escrita da seguinte forma num passo de tempo  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$  relacionado a um determinado incremento de carga:

$$\sigma_{n+1} = \frac{1}{V_\mu} \left[ \int_{\partial\Omega_\mu^h} t_{n+1}^e \otimes_s y dA - \int_{\Omega_\mu^{s(h)}} b_{n+1} \otimes_s y dV \right] \quad (35)$$

onde faz-se uso da seguinte expressão  $u \otimes_s v = \frac{1}{2}(u \otimes v + v \otimes u)$ , no cálculo das integrais, válida para quaisquer vetores  $u$  e  $v$ ;  $t_{n+1}^e$  são as forças ao longo do contorno externo (definidas na equação (31)) e  $y$  é o vetor das coordenadas de um ponto genérico do EVR.

### 2.2.3 Condição de Contorno Imposta ao EVR

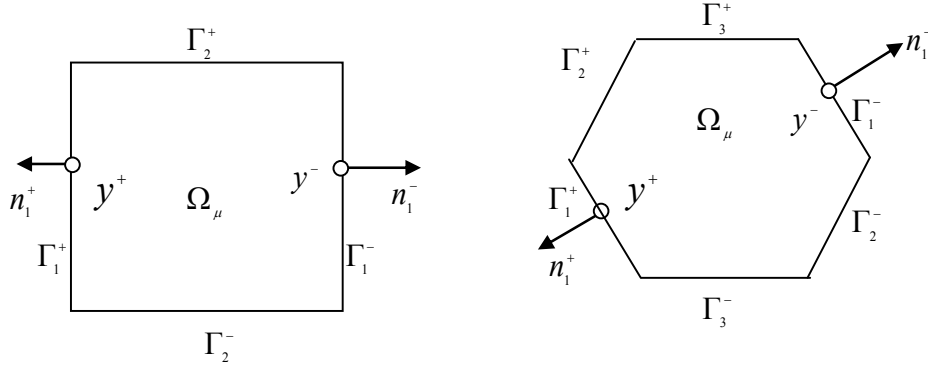
Neste trabalho será adotada apenas a condição de contorno que impõe flutuações periódicas ao longo do contorno do EVR. Porém, outros tipos de condições de contorno são discutidos em [17] e [25]. Note-se que cada condição de contorno leva a uma resposta numérica diferente, definindo-se assim, diferentes modelos em multi-escala.



O modelo com flutuações periódicas no contorno é adequado para descrever o comportamento de materiais que têm microestrutura periódica. No entanto, pode-se mostrar que se for utilizada uma discretização refinada a resposta de qualquer material pode ser modelada por essa condição. Para definir o campo de flutuações neste modelo, considere a figura (2), onde são representados um EVR retangular e outro hexagonal. Observe-se que nos EVRs definidos na figura (2) cada lado  $\Gamma_i^+$  corresponde a um lado igual e oposto  $\Gamma_i^-$ , sendo  $n_i^+$  a direção normal ao contorno  $\Gamma_i^+$  e  $n_i^-$  a direção normal ao contorno  $\Gamma_i^-$ , com  $n_i^+ = -n_i^-$ . Assim, para cada ponto  $y^+$  pertencente ao contorno  $\Gamma_i^+$  existe um ponto correspondente  $y^-$  do contorno  $\Gamma_i^-$ .

Neste modelo, adota-se que as flutuações do par de pontos  $y^+$  e  $y^-$  são iguais, ou seja:

$$\tilde{u}_\mu(y^+, t) = \tilde{u}_\mu(y^-, t) \quad \forall \{y^+, y^-\} \in \partial\Omega_\mu \quad (36)$$



**Figura 2:** Definição de EVRs para meio periódicos: célula retangular e hexagonal

Além disso, são prescritas flutuações de deslocamentos nulas nos cantos. Portanto, neste modelo o espaço  $\mathbb{V}_\mu$  é adotado como:

$$\mathbb{V}_\mu = \{\tilde{u}_\mu \in \tilde{K}_\mu^* / \tilde{u}_\mu(y^+, t) = \tilde{u}_\mu(y^-, t) \quad \forall \{y^+, y^-\} \in \partial\Omega_\mu\} \quad (37)$$

A fim de satisfazer o princípio de Hill-Mandel as forças  $t^e$  devem ser anti-periódicas no contorno, isto é:  $t^e(y^+, t) = -t^e(y^-, t)$  e as forças de volume  $b(y, t)$  devem ser nulas no domínio do EVR. Portanto, a tensão homogeneizada é dada pela equação (35), sendo o segundo termo nulo. Neste modelo o sistema definido em (30) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} F_p \\ F_m \\ F_I \end{Bmatrix}^i + \begin{bmatrix} K_{pp} & K_{pm} & K_{pI} \\ K_{mp} & K_{mm} & K_{mI} \\ K_{Ip} & K_{Im} & K_{II} \end{bmatrix}^i \begin{Bmatrix} \delta\tilde{u}_p \\ \delta\tilde{u}_m \\ \delta\tilde{u}_I \end{Bmatrix}_\mu^{i+1} = 0 \quad (38)$$

onde os índices  $p, m$  e  $I$  definem, respectivamente, pontos  $y^+, y^-$  e internos.

Considerando que  $\delta\tilde{u}_m = \delta\tilde{u}_p$ , o sistema dado pela equação (38) pode ser reduzido e representado da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} F_p + F_m \\ F_I \end{Bmatrix}^i + \begin{bmatrix} K_{pp} + K_{pm} + K_{mp} + K_{mm} & K_{pI} + K_{mI} \\ K_{Ip} + K_{Im} & K_{II} \end{bmatrix}^i \begin{Bmatrix} \delta\tilde{u}_p \\ \delta\tilde{u}_I \end{Bmatrix}_\mu^{i+1} = 0 \quad (39)$$

isto é, neste caso apenas as flutuações de deslocamentos dos pontos  $p$  e  $I$  são incógnitas no sistema de equações necessário resolver no processo iterativo para alcançar o equilíbrio do EVR.

A equação (39) pode ainda ser escrita na seguinte forma geral:

$$\{\delta\tilde{u}_R\}^{i+1} = -[K_R^i]^{-1} \{F_R\}^i \quad (40)$$

onde os vetores  $\{\delta\tilde{u}_R\}^{i+1}$  e  $\{F_R\}^i$  assim como a matriz  $[K_R^i]$  são definidos de acordo com o modelo em multi-escala (ou condição de contorno). Para flutuações periódicas no contorno, eles podem facilmente ser obtidos da equação (39).

### 2.2.4 Tensor Constitutivo Homogeneizado

Considerando-se a equação (24), após a discretização do EVR em elementos, para uma iteração  $i$  de um incremento  $n$  de tempo (sendo  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ ), o tensor constitutivo tangente macroscópico ou homogeneizado  $C^{ep}$  é obtido a partir da equação (22), a qual pode ser escrita como: (ver mais detalhes em [12]):

$$C_i^{ep} = \frac{\partial \sigma^i}{\partial \varepsilon^i} = \frac{\frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^h} \partial f_y(\varepsilon_{n+1} + \nabla^S \tilde{u}_\mu^i) dV}{\partial \varepsilon^i} \quad (41)$$

onde  $\nabla^S \tilde{u}_\mu^i$  é obtido com a solução do problema de equilíbrio do EVR definido na equação (29).

A equação (41) pode ser dividida da seguinte maneira:

$$C_i^{ep} = C_i^{ep(Taylor)} + \tilde{C}_i^{ep} \quad (42)$$

onde  $C_i^{ep(Taylor)}$  é definido como o operador tangente do modelo de Taylor (obtido adotando-se  $\nabla^S \tilde{u}_{\mu(n+1)} = 0$ ), sendo calculado pela média volumétrica do tensor constitutivo microscópico como segue:

$$C_i^{ep(Taylor)} = \frac{\frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^h} \partial f_y(\varepsilon_{n+1}) dV}{\partial \varepsilon^i} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^h} \frac{\partial f_y(\varepsilon_{n+1})}{\partial \varepsilon_\mu} dV = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^h} D_\mu^i dV = \sum_{p=1}^{N_p} \frac{V_p}{V_\mu} D_\mu^{p(i)} \quad (43)$$

onde  $D_\mu$  é o tensor tangente microscópico e  $N_p$  o número de fases definidas no EVR.

Note-se que a parte sólida do EVR pode ser composta por diferentes fases, cada uma podendo ter diferentes propriedades elásticas e serem regidas por diferentes modelos constitutivos.

A outra parte  $\tilde{C}_i^{ep}$  da equação (42) representa a influência da flutuação dos deslocamentos no valor do tensor homogeneizado (ver mais detalhes em [10]). Considerando-se uma discretização em  $N_e$  elementos, a mesma é definida por:

$$\tilde{C}_i^{ep} = \frac{\frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^h} \partial g_y(\nabla^S \tilde{u}_{\mu_i}) dV}{\partial \varepsilon^i} = -\frac{1}{V_\mu} G_R^i K_R^{i-1} G_R^{i T} \quad (44)$$

onde  $G_R$  é definido de acordo com o modelo em multi-escala; para flutuações periódicas é dado por:  $G_R^i = [G_p + G_m \quad G_l]^i$ , sendo  $G$  definida como:  $G = \sum_{e=1}^{N_e} D_\mu^e B_e V_e$ .

### 2.2.5 Algoritmo

É importante notar que para se calcular o vetor de momentos elásticos  $\Delta K_n$  (definido na equação (9)), um módulo de Young  $E$  e um coeficiente de Poisson  $\nu$  devem ser definidos para o macro-contínuo. Como a análise é feita em multi-escala, onde a microestrutura possui fases com diferentes propriedades elásticas, a fim de melhorar a taxa de convergência do processo iterativo do macro-contínuo (placa), esses valores ( $E$  e  $\nu$  da placa) serão adotados como a média volumétrica dos respectivos valores na microestrutura, ou seja:

$$E = \sum_{p=1}^{N_p} \frac{V_p}{V_\mu} E_p \quad (45)$$

$$\nu = \sum_{p=1}^{N_p} \frac{V_p}{V_\mu} \nu_p \quad (46)$$

onde  $N_p$  é o número de fases definidas no EVR.

Observe-se que as equações (45) e (46) não são usadas para resolver o EVR, apenas para calcular os vetores elásticos da placa. No algoritmo a seguir,  $i$  (sendo  $i \geq 0$ ) representa uma iteração do macro-contínuo enquanto  $i_{EVR}$  (sendo  $i_{EVR} \geq 0$ ) está relacionado com o processo iterativo do EVR. O processo incremental-iterativo necessário para alcançar o equilíbrio da placa em um incremento  $n$  é:

1. Cálculo do incremento de momentos elásticos  $\Delta K_n$  (definida na equação (9)).
2. Para cada nó da placa:
  - 2.1 Incremento de curvatura  $\Delta \chi_n^0$  é obtido com a lei de Hooke (equação (3)).
  - 2.2 Um EVR é definido para cada ponto de Gauss definido ao longo da espessura da placa. O EVR é resolvido seguindo o procedimento:
    - 2.2.1 As macro-deformações são impostas ao EVR:  $\Delta \varepsilon_n^i = -x_3 \Delta \chi_n^i$ .

2.2.2 Para  $i_{RVE} = 0$ , as flutuações de deslocamentos são nulas e, portanto, os deslocamentos no EVR (equação 23) são:  $\{\Delta u_{\mu}^t\}_n^0 = [\Delta \varepsilon]_n^i \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_y$ .

2.2.3 Solução do problema de equilíbrio do EVR (processo iterativo  $i_{RVE} \geq 0$ ):

a) Valores nodais das forças  $\{F\}_{n+1}^{i_{RVE}}$  (equação (31)). Para isso, os seguintes valores devem ser computados para cada elemento finito  $e$ :

-vetor do incremento de deformação de tentativa:  $\{\Delta \varepsilon_{\mu}^{e(t)}\}_n^{i_{RVE}} = B_e \{\Delta u_{\mu}^{e(t)}\}_n^{i_{RVE}}$ ,

- vetor do incremento de tensão de tentativa  $\{\Delta \sigma_{\mu}^{e(t)}\}_n^{i_{RVE}}$ , usando a lei de Hooke,

-vetor de tensão de tentativa:  $\{\sigma_{\mu}^{e(t)}\}_{n+1}^{i_{RVE}+1} = \sigma_n^e + \{\Delta \sigma_{\mu}^{e(t)}\}_n^{i_{RVE}}$ .

- verifica-se o modelo constitutivo, obtendo-se a tensão  $\{\sigma_{\mu}^e\}_{n+1}^{i_{RVE}+1}$  e o tensor constitutivo  $[D_{\mu}^e]_n^{i_{RVE}}$  (todas as variáveis são atualizadas tendo como base os valores do incremento anterior (ver em [26])).

b) O vetor  $\{F_R\}_{n+1}^{i_{RVE}}$  (equação (40)) é obtido de acordo com o modelo em multi-escala.

c) Verifica-se a convergência:

$$\frac{\sqrt{F_R^T F_R}}{\sqrt{F_P^T F_P}} \leq tol, \text{ onde } F_p \text{ são as forças nodais no lado } \Gamma_i^+ \text{ (ver figura (2)) e tol é a tolerância adotada para}$$

o processo iterativo. Se há convergência, segue no passo (2.2.4); se não há, o processo continua no passo d.

d) Obtêm-se a matriz de rigidez do EVR (equação (32)) e a matriz  $[K_R]_{(n)}^{i_{RVE}}$  (equação (40));

e) Resolve-se o sistema dado pela equação (40) e obtêm as correções de flutuações  $\{\delta \tilde{u}_R\}_n^{i_{RVE}+1}$ ;

f) Obtêm-se o vetor total  $\{\delta \tilde{u}\}_n^{i_{RVE}+1}$ .

g) Calcula-se o novo incremento de deslocamento a ser imposto ao EVR:

$\{\Delta u_{\mu}^t\}_n^{i_{RVE}+1} = [\Delta \varepsilon]_n^i \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_y + \{\Delta \tilde{u}_{\mu}\}_n^{i_{RVE}+1}$ , onde  $\{\Delta \tilde{u}_{\mu}\}_n^{i_{RVE}+1} = \{\Delta \tilde{u}_{\mu}\}_n^{i_{RVE}} + \{\delta \tilde{u}\}_n^{i_{RVE}+1}$  e retorna-se

ao passo (a).

2.2.4 Obtêm-se o tensor constitutivo homogeneizado  $[C^{ep}]_n^i$  (equação (20)).

2.2.5 Obtêm-se a tensão homogeneizada  $\sigma_{n+1}^{i+1}$  (equação (35)), onde o segundo termo é nulo para flutuações periódicas; calcula-se o incremento de tensão  $\Delta \sigma_n^i = \Delta \sigma_{n+1}^{i+1} - \sigma_{n-1}$  do macro.

2.2.6 Obtêm-se o incremento de momento  $\Delta m_n^i$  (equação (18)) e o tensor constitutivo  $[C_m^{ep}]_n^i$  (equação (17)).

3. Verifica-se o equilíbrio do macro-contínuo expresso pela equação (13).

3.1 Se o resíduo  $R_M$  não for nulo, a matriz tangente (equação (16)) é atualizada e as ções  $\delta \Delta \chi_n^{i+1}$  (equação (15)) são calculadas. Atualiza-se o incremento de curvatura  $\Delta \chi_n^{i+1}$  (equação (14)) a ser aplicado na próxima iteração e retorna-se ao passo 2.2 para começar a nova iteração  $i + 1$ .

3.2 Se o critério de convergência do macro é nulo, de acordo com a tolerância adotada, continua no passo 4.

4. Calculam-se os valores nodais dos momentos plásticos (equação (11)) e os valores nodais de deslocamentos, forças e esforços internos (equações (8) e (10)).

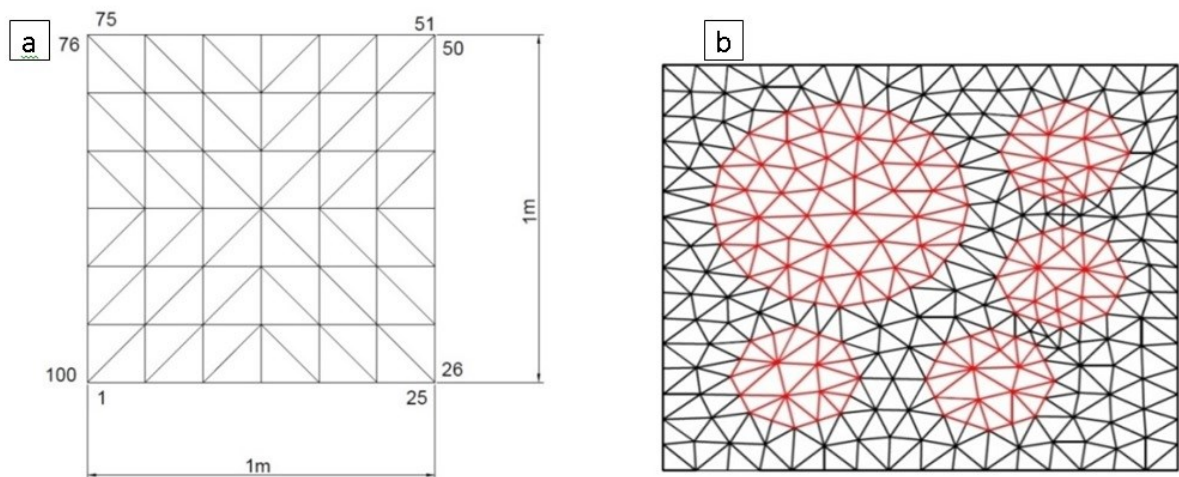
5. Retorna-se ao passo 1 e aplica-se novo incremento  $n + 1$ .

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Como exemplo inicial de aplicação da formulação proposta, adota-se uma placa quadrada cujos lados medem 1m (ver figura (3a)), sendo a mesma apoiada nas quatro bordas e submetida a uma carga uniformemente distribuída de 1 N/cm<sup>2</sup>. Além disso, adotou-se para a mesma 4 cm de espessura e a discretização definida na figura (3a), onde têm-se 100 nós no contorno, 25 pontos internos, 72 células e 48 elementos no contorno. Considerando-se essa placa são realizadas diferentes análises numéricas.

Neste exemplo objetiva-se mostrar que a formulação proposta é capaz de capturar os diferentes comportamentos da estrutura com a manipulação da microestrutura heterogênea. Para tanto, inicialmente, os resultados numéricos são obtidos adotando-se uma análise não linear convencional, onde um material homogêneo é utilizado a fim de comparar com aqueles referentes a uma análise não-linear multi-escala. Nesse segundo caso, a microestrutura do material é modelada inserindo inclusões mais rígidas na matriz, o que aumenta a rigidez da estrutura.

Para a análise não-linear convencional adotou-se que a estrutura é composta por um material que obedece o modelo de Von Mises com haderning isotrópico com as seguintes propriedades: módulo de elasticidade  $E = 2000 \text{ kN/cm}^2$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$ ; tensão de escoamento de  $70 \text{ N/cm}^2$  e módulo de encruamento  $K = 430 \text{ N/cm}^2$ . Já na análise multi-escala, o material tem sua microestrutura representada por um EVR onde cinco inclusões elásticas são inseridas na matriz metálica, cujas propriedades são:  $\nu = 0,35$  e  $E = 4000 \text{ kN/cm}^2$ , enquanto que para a matriz do EVR é definida com as mesmas propriedades do material homogêneo da análise não-linear convencional. Condições periódicas foram utilizadas na modelagem do EVR. Na discretização do EVR adotaram-se 520 elementos triangulares e 293 nós (veja figura (3b)) e como condição de contorno no mesmo foi considerada flutuações periódicas. Vale ressaltar que na formulação aqui desenvolvida, cada EVR representa um ponto do macro e, portanto, suas dimensões não são importantes, porém é fundamental o conhecimento da proporcionalidade entre as fases constituintes e a localização dos constituintes. Ou seja, os resultados numéricos não mudam em função das dimensões adotadas para os lados do EVR.

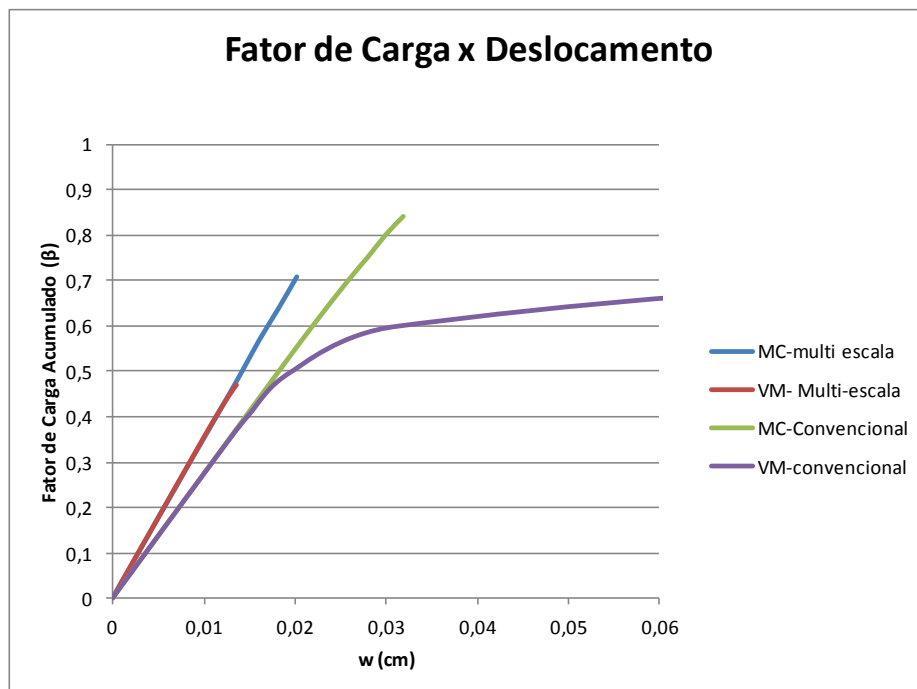


**Figura 3:** a) Discretização da placa: 100 nós no contorno, 72 células b) Discretização do EVR com inclusões elásticas.

Esse tipo de geometria de EVR pode representar materiais como o concreto, onde inclusões elásticas mais rígidas (agregados) são adicionadas à matriz (argamassa), de comportamento mais flexível. Também se pode pensar na modelagem de materiais compósitos com matriz metálica reforçada (CMM), [25]. Contudo, focando em materiais como o concreto, para modelar o comportamento da matriz, além do modelo de Von Mises, é adotado também o modelo de Mohr-Coulomb, a fim de mostrar que os resultados mudam de acordo com o modelo constitutivo adotado, o que ressalta a importância de adotar um modelo constitutivo que melhor represente o comportamento do material. No entanto, para modelar o comportamento da argamassa, que é um material frágil, o modelo de Mohr-Coulomb seria mais indicado por considerar uma limitação de resistência para estados predominantes de tração. Para o modelo de Mohr Coulomb foram adotados os mesmos parâmetros já citados para o modelo de Von Mises, além de ser definido o ângulo de dilatação de  $20^\circ$  e ângulo de fricção de  $10^\circ$ , o que leva a uma regra não-associativa, [9].

A figura (4) apresenta o deslocamento do ponto central da placa ao longo do processo incremental, considerando-se os diferentes tipos de análises. Observa-se que os resultados das análises multi-escala estão

bem próximos e os resultados mostram um comportamento mais rígido da estrutura, devido à consideração de inclusões elásticas na microestrutura do material. Os resultados da análise não-linear convencional foram bem diferentes a partir do ponto que houve plastificação, o que era esperado devido a menor rigidez do material homogêneo. Focando no caso das análises multi-escala, a estrutura evidenciou processos de plastificação devido ao emprego dos modelos constitutivos mencionados, entretanto, com a consideração de perfeita aderência entre agregado e matriz, sendo os agregados mais rígidos que a matriz, foi evidenciada uma rigidez maior da estrutura mesmo com o processo de plastificação da matriz, o que mostra que a inserção de inclusões rígidas na microestrutura do material leva a um ganho de resistência e rigidez. Também percebe-se que a inserção de inclusões rígidas na matriz limita o comportamento dúctil do material quando comparado às análises convencionais, principalmente no caso do emprego do modelo de Von Mises (abreviado como VM na figura (4)). Ainda discutindo as análises convencionais, com o modelo de Mohr Coulomb (abreviado como MC na figura (4)) a estrutura resiste a maiores carregamentos, porém apresenta menores deslocamentos caracterizando materiais frágeis enquanto o modelo de Von Mises apresenta um grande aumento no valor do deslocamento com pequeno incremento de carga, caracterizando o comportamento de materiais mais dúcteis.



**Figura 4:** Deslocamentos no ponto central da placa considerando-se diferentes tipos de análises.

Analisando agora a placa definida na figura (5) para representar o macro-contínuo, o EVR considerado é composto por uma matriz metálica, de comportamento elasto-plástico, onde se define uma inclusão elástica, cuja área será modificada a fim de demonstrar como o aumento de sua área afeta diretamente a resistência e rigidez do material e, conseqüentemente, o comportamento da estrutura. Esse tipo de EVR pode representar materiais como o CMM, onde inclusões são adicionadas ao material a fim de melhorar suas propriedades elásticas ligadas à rigidez e à resistência.

A figura (5a) ilustra a placa analisada, onde os lados menores são considerados livres enquanto que os outros dois lados são engastados. Para a definição da geometria da placa adotou-se: espessura  $t_h=4,0$  cm,  $a=200,0$  cm e  $b=100,0$  cm. Como carregamento, considerou-se uma carga  $g=3,5$  kN/cm<sup>2</sup> uniformemente distribuída sobre a área central definida na figura, a fim de representar uma carga concentrada de 787,5 kN aplicada no centro da placa. Na discretização da placa foram adotados 36 elementos no contorno e 144 células no domínio como definido na figura (5b).

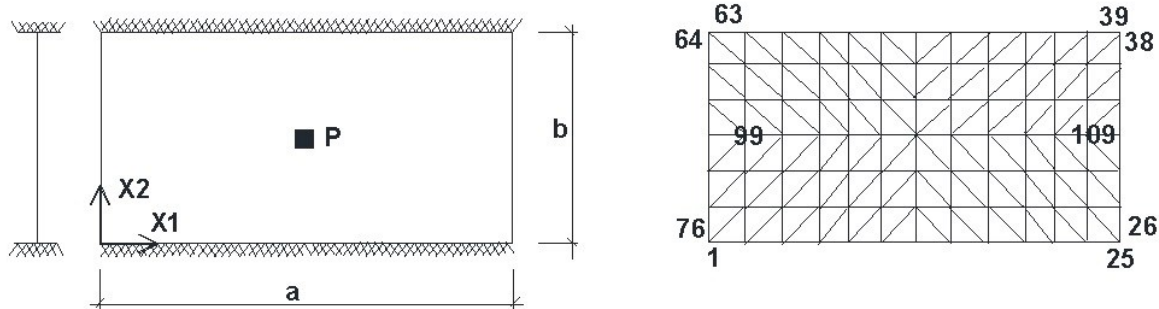


Figura 5: a) Condições de Contorno b) Discretização da placa.

Para modelar o comportamento elasto-plástico da matriz será adotado o critério de Von Mises, sendo adotado: encruamento  $K=2000 \text{ kN/cm}^2$ , coeficiente de Poisson  $\nu=0,3$ ; Módulo de Elasticidade  $E=20000 \text{ kN/cm}^2$ , tensão de escoamento  $\sigma_y=40,0 \text{ kN/cm}^2$ . Por outro lado, as seguintes propriedades elásticas serão adotadas para as inclusões:  $\nu=0,3$  e  $E= 160000 \text{ kN/cm}^2$ . Serão considerados três diferentes tamanhos para a inclusão: o primeiro EVR possui uma fração de volume de inclusão de 5%, onde foram adotados 720 elementos finitos triangulares e 393 nós na discretização (veja figura (6)); para o segundo EVR adotou-se fração de volume de inclusão de 10%, com 584 elementos finitos triangulares e 325 nós (figura (7)); finalmente, para o terceiro EVR foi utilizada uma fração volumétrica de inclusão de 30%, com 572 elementos finitos triangulares e 319 nós (figura (8)). Condições periódicas foram utilizadas na modelagem do EVR.

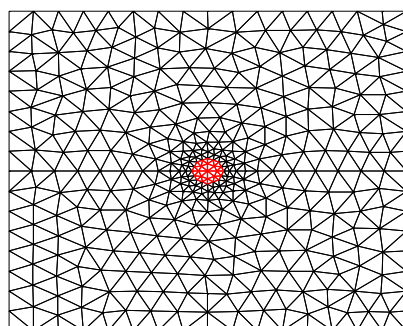


Figura 6: Discretização do EVR com fração de volume de 5% para a inclusão

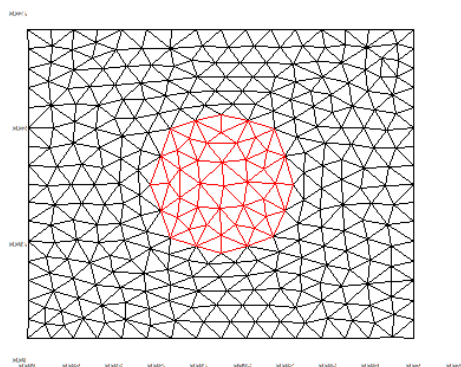
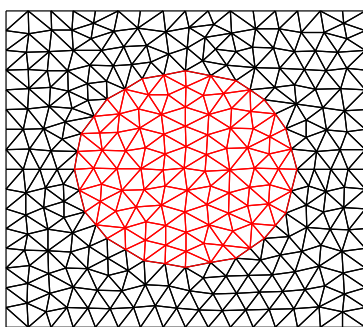


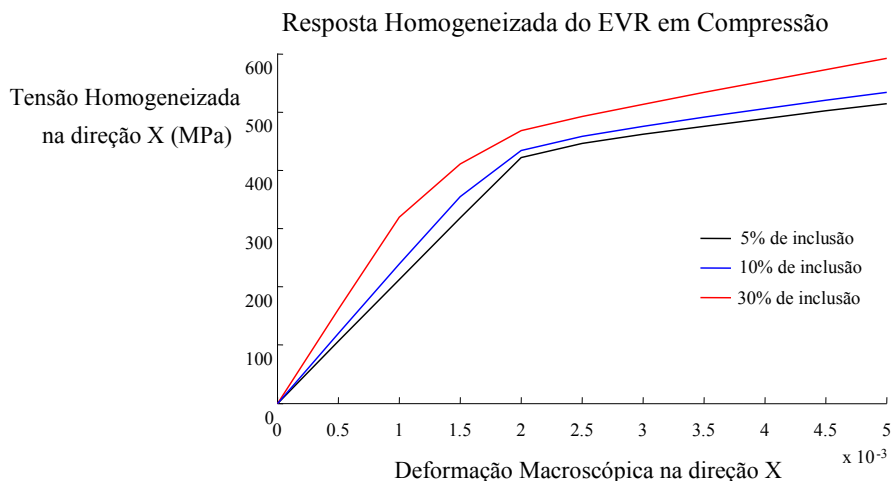
Figura 7: Discretização do EVR com fração de volume de 10% para a inclusão



**Figura 08:** Discretização do EVR com fração de volume de 30% para a inclusão

No que segue são apresentadas as respostas dos EVRs em termos de tensão homogeneizada na direção  $x$  quando submetidos a uma deformação macroscópica, tendo como objetivo a simulação de estados predominantes de tração e de compressão, evidenciando a diferença de comportamento mecânico da microestrutura heterogênea. Para o caso de estados predominantes de tração foi imposta a deformação macroscópica  $\epsilon = [\epsilon_x; \epsilon_y; \gamma_{xy}] = [0,005; -0,000695; 0,0]$ . Já para o caso de estados predominantes de compressão, foi imposta a deformação macroscópica  $\epsilon = [\epsilon_x; \epsilon_y; \gamma_{xy}] = [-0,05; 0,000695; 0,0]$ . Nos dois casos, as deformações macroscópicas foram aplicadas em 10 incrementos utilizando uma tolerância de  $10^{-8}$  para verificação do processo incremental-iterativo. Condições periódicas foram utilizadas na modelagem do EVR.

No caso de estados predominantes de compressão, a figura (9) ilustra as respostas obtidas. Observa-se que o aumento da fração volumétrica de inclusão (reforço da matriz metálica) confere um aumento da rigidez e resistência da microestrutura do material. Isso é refletido no comportamento mecânico da macroestrutura ilustrada na figura (10). Observa-se ainda que o aumento da fração volumétrica de inclusão também evidencia sua influência no comportamento elástico do EVR, onde a plasticidade da matriz fica menos evidente. Em particular, a resposta do EVR com 5% de inclusão mostra um comportamento mecânico elástico até  $42 \text{ kN/cm}^2$  ( $420 \text{ MPa}$ ) quando há o início dos processos de plastificação da matriz. Já o aumento da fração volumétrica da inclusão mostra valores menores de tensão para início da plastificação, isso porque a presença da inclusão rígida faz com que o nível de tensão no EVR seja aumentado.



**Figura 9:** Comparação dos resultados de Tensão homogeneizada de compressão na direção  $x$  ( $\sigma_x$ ) do EVR

versus deformação macroscópica de encurtamento imposta na direção  $x$  ( $\epsilon_x$ ) para os casos de fração volumétrica de inclusão de 5%, 10% e 30%. Os valores foram considerados positivos para melhor visualização.

No caso de estados predominantes de tração, as respostas obtidas foram exatamente as mesmas obtidas para estados predominantes em compressão. Isso é devido ao uso do modelo de Von Mises que considera que os materiais têm o mesmo comportamento mecânico em tração e compressão.

A figura (10) apresenta as respostas obtidas com o emprego das análises multi-escala da placa, sendo analisado o deslocamento no ponto central da placa com a evolução do fator de carga. Observa-se que o ganho de rigidez demonstrado nas análises da microestrutura (figura (9)) é refletido no comportamento mecânico do macro-contínuo. É interessante constatar como a manipulação da microestrutura, inserindo inclusões com maior rigidez na matriz elasto-plástica, leva a um comportamento desejável da estrutura, que em nosso caso, procurou-se aumentar a rigidez da estrutura com a manipulação do material homogêneo, conferindo-lhe maior rigidez e, em contrapartida, heterogeneidade. Portanto, com a formulação multi-escala é possível analisar estruturas compostas por materiais complexos em sua microestrutura recorrendo a modelos constitutivos simples em formulação e com poucos parâmetros, sem a necessidade de recorrer a modelos constitutivos fenomenológicos com alto grau de complexidade. Em suma, os resultados apresentados neste trabalho estão em concordância com respostas esperadas, as quais também estão relatadas em [7], [10], [11] e [14], tanto em análises desacopladas da microestrutura apenas, como também em análises envolvendo a micro e macroestrutura de forma totalmente acoplada.

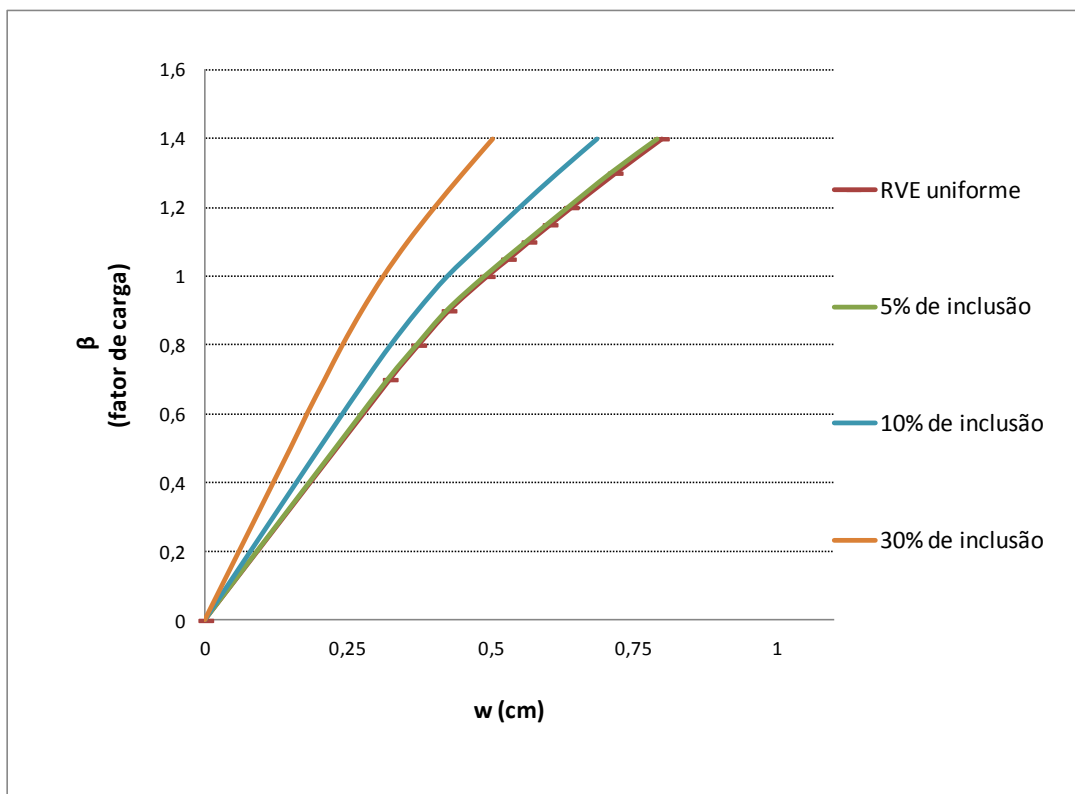


Figura 10: Deslocamento no ponto central da placa ao longo do processo incremental.

#### 4. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada a formulação multi-escala para análise de flexão de placas, onde o MEC foi usado para modelar a macro-escala e o MEF adotado para modelar a micro-escala. Neste modelo cada nó de célula da placa é representado por um EVR, cujo problema de equilíbrio deve ser resolvido para se obter a tensão e o tensor constitutivo do nó da placa através de um processo de homogeneização.

Foram apresentadas análises numéricas, onde os resultados obtidos com a análise não-linear convencional foram comparados com aqueles obtidos com as respostas do emprego da formulação multi-escala. Adotaram-se diferentes modelos constitutivos para representar o comportamento do material, tendo definidas inclusões elásticas no EVR a fim de enrijecer a estrutura. O modelo de Von Mises é ideal para representar o comportamento de materiais dúcteis, os quais apresentam valores consideráveis de deformação plástica antes de atingir o estado de colapso, sendo o modelo de Mohr Coulomb mais indicado para materiais frágeis, que rompem sem apresentar deformações plásticas muito consideráveis. Contudo, o emprego desses modelos,



associados à geometria e à fração volumétrica dos constituintes da microestrutura, levam à capacidade de obtenção de respostas numéricas de estruturas compostas por materiais heterogêneos ao se utilizar a formulação multi-escala.

Os resultados obtidos são coerentes, isto é, obteve-se resposta mais rígida com a análise em multi-escala se comparada à análise não-linear convencional e uma curva mais flexível quando se adotou o modelo de Von Mises para modelar a matriz da microestrutura. Além disso, é importante dizer que o programa mostrou ser estável, sendo a convergência do processo incremental-iterativo sempre alcançada com poucas iterações. Daí a importância da formulação tangente consistente apresentada neste trabalho, principalmente numa análise multi-escala, onde o custo computacional é um limitador de sua utilização para grandes problemas.

Por outro lado, os exemplos numéricos evidenciaram a capacidade da modelagem multi-escala em capturar a influência da modificação das propriedades da microestrutura na rigidez do macro-contínuo, evidenciando que a validação qualitativa da formulação proposta foi alcançada. Acredita-se que esse é um passo inicial antes de aplicações e comparações com respostas experimentais em estruturas compostas por materiais heterogêneos.

Por fim, os resultados apresentados até então são promissores. A formulação apresentada aqui está em aperfeiçoamento para se considerar o processo de fraturamento na microestrutura com o intuito de modelar o descolamento da interface inclusão/matriz em CMMs (ver os trabalhos [6] e [25]) e sua influência no macro-contínuo. Já no caso de materiais frágeis como o concreto, o surgimento e localização do processo de danificação na microestrutura e sua posterior transição para o macro-contínuo em forma de fraturamento, é uma linha de pesquisa ainda em aberto, onde alguns trabalhos foram publicados, [27] e [28].

## 5. AGRADECIMENTO

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq, pelo suporte financeiro fornecido durante a realização do trabalho.

## 6. BIBLIOGRAFIA

- [1] PITUBA, J. J. C., FERNANDES, G. R., “An anisotropic damage model for concrete”, *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, v. 137, n.9, pp. 610-624, 2011.
- [2] PITUBA, J. J. C., “Anisotropic damage model on the effects of damage process due to shearing stress in concrete”, *Acta Scientiarum: Technology*, v. 35, n.2, pp. 227-236, 2013.
- [3] PITUBA, J. J. C., “A damage model formulation: unilateral effect and RC structures analysis”, *Computers and Concrete, An International Journal*, v. 15, n.5, pp. 709-733, 2015.
- [4] MATALLAH, M., LA BORDERIE, C., “Inelasticity–damage-based model for numerical modeling of concrete cracking”, *Engineering Fracture Mechanics*, v. 76, pp. 1087-1108, 2009.
- [5] GAL, E., KRYVORUK, R., “Fiber reinforced concrete properties – a multiscale approach”, *Computers and Concrete, An International Journal*, v. 8, n.5, pp. 525-539, 2011.
- [6] PITUBA, J. J. C., FERNANDES, G. R., SOUZA NETO, E. A., “Modeling of cohesive fracture and plasticity processes in composite microstructures”, *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, v. 142, n.10, DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001123, 2016.
- [7] NGUYEN, V.P., LLOBERAS VALLS, O., STROEVEN, M., *et al*, “Homogenization-based multiscale crack modelling: from micro-diffusive damage to macro-cracks”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 200, n.9–12, pp. 1220–1236, 2011.
- [8] KOUZNETSOVA, V., GEERS, M. G. D., BREKELMANS, W. A. M., “Multi-scale second-order computational homogenization of multi-phase materials: a nested finite element solution strategy”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, pp. 5525–5550, 2004.
- [9] PITUBA, J. J. C., SOUZA NETO, E. A. “Modeling of unilateral effect in brittle materials by a mesoscopic scale approach”, *Computers and Concrete, An International Journal*, v. 15, n.5, pp. 735-758, 2015.
- [10] PERIC, D., SOUZA NETO, E. A., FEIJÓO, R., *et al.*, “On Micro-to-Macro Transitions for Multiscale Analysis of Heterogeneous Materials: Unified Variational Basis and Finite Element Implementation”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 87, pp. 149-170, 2011.
- [11] GIUSTI, S. M., BLANCO, P. J., SOUZA NETO, E. A., *et al.*, “An assessment of the Gurson yield criterion by a computational multi-scale approach”, *Engineering Computations*, v. 26, n.3, pp. 281-301, 2009.

- [12] SOUZA NETO, E. A., FEIJÓO, R. A., *Variational foundations of multi-scale constitutive models of solid: Small and large strain kinematical formulation*. National Laboratory for Scientific Computing (LNCC/MCT), Brazil, Internal Research & Development Report No. 16, 2006.
- [13] WATANABE, I., TERADA, K., SOUZA NETO, E. A., *et al.*, “Characterization of macroscopic tensile strength of polycrystalline metals with two-scale finite element analysis”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 56, pp. 1105–1125, 2008.
- [14] SOMER, D.D., SOUZA NETO, E. A., DETTMER, W. G., *et al.*, “A sub-stepping scheme for multi-scale analysis of solids”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 198, pp. 1006–1016, 2009.
- [15] SAAVEDRA-FLORES, E. I., SOUZA NETO, E. A., PEARCE, C., “A large strain computational multi-scale model for the dissipative behavior of wood cell-wall”. *Computational Materials Science*, v. 50(3): pp. 1202-1211, 2011.
- [16] FERNANDES, G. R., SOUZA NETO, E. A., “Self-consistent linearization of non-linear BEM formulations with quadratic convergence”, *Computational Mechanics*. DOI: 10.1007/s00466-013-0867-2, v. 52, pp. 1125-1139, 2013.
- [17] FERNANDES G. R., PITUBA J. J. C., SOUZA NETO E. A. “Multi-Scale Modelling For Bending Analysis of Heterogeneous Plates by Coupling BEM AND FEM”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 51, pp. 1-13, 2015.
- [18] FERNANDES G. R., PITUBA J. J. C., SOUZA NETO E. A. “FEM/BEM formulation for multi-scale analysis of stretched plates”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 54, pp. 47-59, 2015.
- [19] FERNANDES, G. R., DENIPOTTI, G. J., KONDA, D. H., “A BEM formulation for analysing the coupled stretching-bending problem of plates reinforced by rectangular beams with columns defined in the domain”, *Computational Mechanics*, v. 45, pp. 523 - 539, 2010.
- [20] FERNANDES, G. R. “A BEM formulation for linear bending analysis of plates reinforced by beams considering different materials”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 33, pp. 1132 - 1140, 2009.
- [21] FERNANDES, G. R., KONDA, D. H. “A BEM formulation based on Reissner’s theory to perform simple bending analysis of plates reinforced by rectangular beams”, *Computational Mechanics*, v. 42, pp. 671 - 683, 2008.
- [22] FERNANDES, G. R., VENTURINI, W. S. “Building floor analysis by the Boundary element method”, *Computational Mechanics*, v. 35, pp. 277 - 291, 2005.
- [23] FERNANDES, GR., KONDA, DH. “A BEM formulation based on Reissner's hypothesis for analysing the coupled stretching-bending problem of building floor structures”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 36, pp. 1377 - 1388, 2012.
- [24] FERNANDES, G. R., VENTURINI, W. S. “Non-linear boundary element analysis of floor slabs reinforced with rectangular beams”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 31, pp. 721 - 737, 2007.
- [25] SANTOS, W. F., FERNANDES, G. R., PITUBA, J. J. C., “Análise da influência dos processos de plasticidade e fratura no comportamento mecânico de microestruturas de Compósitos de Matriz Metálica”, *Revista Matéria*, v. 21, n.3, pp. 577 - 598, 2016.
- [26] SOUZA NETO, E. A., PERIC, D., OWEN, D. R. J. *Computational methods for plasticity: Theory and applications*, Wiley, Chichester, 814 pp, 2008.
- [27] RODRIGUES, E. A., MANZOLI, O. L., BITENCOURT JR, L. A. G., *et al.*, “2D mesoscale model for concrete based on the use of interface element with a high aspect ratio”, *International Journal of Solids and Structures*, v. 94-95, pp. 112-124, 2016.
- [28] TORO, S., SANCHEZ, P. J. S., BLANCO, P. J., *et al.*, “Multiscale formulation for material failure accounting for cohesive cracks at the macro and micro scales”, *International Journal of Plasticity*, v. 76, pp. 75-110, 2016.